

# Periodische Gesetzmässigkeit der Elemente nach Mendeleieff

Gruppe I	Gruppe II	Gruppe III	Gruppe IV	Gruppe V	Gruppe VI	Gruppe VII	Gruppe VIII
$R^2 O$	$RO$	$R^2 O^3$	$RH^4$ $RO^2$	$RH^3$ $R^2 O^5$	$RH^2$ $RO^3$	$RH$ $R^2 O^7$	$RO^4$
H=1							
Li=7	Be=9,4	B=11	C=12	N=14			
Na=23	Mg=24	Al=27,3	Si=28				
K=39	Ca=40	Sc=44	Ti=48	V=51			
(Cu=63)	Zn=65	Ga=68	--=72	As=75	Se=79	Br=80	
Rb=85	Sr=87	Yt=88	Zr=90	Nb=94	Mo=96	--=100	Ru=104, Rh=104
(Ag=108)	Cd=112	In=113	Sn=118	Sb=122	Te=125	J=127	Pd=106, Ag=108
S=133	Ba=137	Ce=137	La=139	--			
(-)	-	-	-	-	-	-	-
165	-	169	Er=170	-	173	Ta=182	W=184
(Au=196)	Hg=200	Tl=204	Pb=208	Bi=			Pt=194, Os=195(?)
-	-	-	Th=231	-			Ir=193, Au=196

## ACTES DE LA XVII JORNADA SOBRE LA HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I L'ENSENYAMENT

«Antoni Quintana i Marí»

Edició a cura de:

Carmel FERRAGUD  
Maria Rosa MASSA-ESTEVE

Barcelona, 15 i 16 de novembre de 2019



SOCIETAT  
CATALANA  
D'HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA  
I DE LA TÈCNICA

**ACTES** DE LA  
**XVII JORNADA**  
**SOBRE LA HISTÒRIA**  
DE LA **CIÈNCIA**  
**I L'ENSENYAMENT**



**ACTES** DE LA  
**XVII JORNADA**  
**SOBRE LA HISTÒRIA**  
DE LA **CIÈNCIA**  
**I L'ENSENYAMENT**

**«Antoni Quintana i Marí»**

Edició a cura de:  
**Carmel FERRAGUD**  
**Maria Rosa MASSA-ESTEVE**

**Barcelona, 15 i 16 de novembre de 2019**



**SOCIETAT CATALANA D'HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA**  
FILIAL DE L'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

Il·lustració de la coberta: Taula periòdica ca. 1885. Font: University of St. Andrews.

© dels autors de les ponències

© 2021, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica,  
filial de l'Institut d'Estudis Catalans, per a aquesta edició

Carrer del Carme, 47. 08001 Barcelona

Primera edició: juliol de 2021

Compost per Foletra, SA



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública de *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>.

## SUMARI

C. FERRAGUD; M. R. MASSA-ESTEVE. <i>Introducció</i> .....	7
J. SIMON. <i>La màquina universal: mètode infal·lible per resoldre qualsevol problema pedagògic mitjançant la intuïció historicocientífica</i> .....	9
F. ROMERO VALLHONESTA; M. R. MASSA-ESTEVE; I. GUEVARA CASANOVA; C. PUIG-PLA. <i>Textos històrics per a l'aprenentatge de les matemàtiques. El cas dels nombres negatius</i> .....	17
A. ROCA ROSELL. <i>Els orígens de l'ensenyament tècnic en escoles. Un nou model?</i> .....	29
J. BERENQUER. <i>Les institucions geomètriques de La Chapelle</i> .....	37
M. MONTAVA. <i>Projecte educatiu: reproducció a escala de tres elements de la màquina de vapor de Francesc Santponç i Roca</i> .....	45
A. EROLES CRILLÉ. <i>La metodologia didàctica en l'àlgebra de Josep Saragossà (1627-1679)</i> .....	59
D. MARTÍNEZ-VERDÚ; M. R. MASSA-ESTEVE. <i>La enseñanza del concepto de función en los tratados de Benito Bails (1731-1797)</i> .....	67
P. J. HERRERO PIÑEYRO; A. LINERO BAS; A. MELLADO ROMERO. <i>Algunas observaciones sobre el beneficio de la historia de las matemáticas en la actividad docente e investigadora</i> .....	75
J. M. PONS POBLET. <i>L'assignatura història de la ciència i de la tècnica a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB), trenta anys després</i> ....	89
N. SOLSONA PAIRÓ; M. QUINTANILLA GATICA; Y. ARIZA. <i>Filosofia de la ciència, història de la ciència i didàctica de les ciències: perspectives teòriques actuals i emergència del model de gènere</i> .....	101
P. GRAPÍ VILUMARA. <i>La taula periòdica dels elements químics</i> .....	107
N. SOLSONA PAIRÓ. <i>La taula periòdica de les científiques</i> .....	109
R. M. MELIÀ; M. T. PUIGVERT. <i>Ensenyament d'històries sobre color i elements en l'any internacional de la taula periòdica</i> .....	115



## INTRODUCCIÓ

Immersos com estem, una vegada més —i ja n'hem perdut el compte en els darrers vint anys—, en la revisió dels plans educatius de l'Estat espanyol, que d'una manera o altra acabaran afectant-nos, les reflexions sobre l'evolució, els mètodes, les circumstàncies o els materials i les estratègies de l'ensenyament de la ciència en temps pretèrits sempre resulten estimulants. Sovint, són sorprenentment inspiradores i interrogadores sobre el que fem a les aules, si hem anat a millor o quines coses hauríem de fer per millorar la nostra tasca com a docents, i què ens caldria per seduir els nostres estudiants i inspirar-los la vocació i l'amor per la ciència, des de les beceroles fins a la universitat. Totes les etapes educatives són enormement importants i totes mereixen que es faci un esforç per reflexionar sobre els nostres objectius i com volem dur a la pràctica la tasca docent.

Això és ni més ni menys el que va aportar la Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana i Marí». Per dissetè cop, un grup de professores i professors, investigadores i investigadors que desitgem repensar des de la història la tasca de transmetre la ciència, i tot el que això comporta, ens vam reunir els dies 15 i 16 de novembre a la seu de l'IEC. En la jornada es va posar en relleu l'estat actual de les recerques que es duen a terme en la nostra àrea, amb aportacions d'intervenció directa a l'aula per a fer visible la història de la ciència en els ensenyaments secundaris i universitaris. Així, les professores i els professors varen poder compartir experiències sobre la utilitat de la història de la ciència per a millorar-ne l'ensenyament.

La jornada va tenir cinc sessions de comunicacions. Volem destacar que una d'aquestes va estar dedicada a la commemoració de la taula periòdica de Mendelèiev. Pere Grapí ens fa una presentació al que fou aquesta efemèride i com la celebrarem. Es presentaren en total vint-i-dues comunicacions, amb la participació de trenta-vuit autores i autors.

En el marc de la jornada es va dur a terme el lliurament del XVIII Premi Antoni Quintana i Marí per a treballs de recerca d'estudiants d'ensenyament secundari obligatori i postobligatori. Els premis de secundària obligatòria varen ser: Laura Calavia Zellingger, Sabrina Caserta Pinto i Yasmina Bengarda Lakbir amb el treball



«Elemental, benvolgut Watson! Literatura policíaca i ciència», i el premi de secundària postobligatòria va ser per a Artur Farriols Raimí amb el treball «Francesc Terrades i Pla (1873-1963)». En aquesta ocasió els estudiants premiats van presentar davant l'auditori els resultats de la seua recerca. Aquest és un guardó que pretén estimular entre els estudiants de secundària i batxillerat l'interès per la història de la ciència. Tot i les dificultats per augmentar la participació, fins ara la qualitat i l'afany posat pels estudiants que hi han intervingut han estat notables.

Finalment, la jornada va cloure amb la conferència de Josep Simon, que també hem publicat en aquestes actes. Constitueix un magnífic exemple precisament del valor que té la reflexió en clau històrica per poder fer aportacions fermes i detectar aquells que ens volen vendre fum.

Esperem que els treballs siguen del vostre gust i servisquen com a aportació rellevant als nostres objectius.

Carmel Ferragud  
Maria Rosa Massa-Esteve

# LA MÀQUINA UNIVERSAL: MÈTODE INFAL·LIBLE PER RESOLDRE QUALSEVOL PROBLEMA PEDAGÒGIC MITJANÇANT LA INTUÏCIÓ HISTORICOCIENTÍFICA

**JOSEP SIMON**

INSTITUT INTERUNIVERSITARI LÓPEZ PIÑERO, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA.

Paraules clau: *TIC, educació, ordinadors, pedagogia, didàctica, tecnologia educativa*

## **The universal machine: An infallible method for solving any pedagogical problem by means of historical-scientific intuition**

*Summary: Science education has been extensively conducted through technological objects and it is currently advocating a massive introduction of information and communication technologies (ICTs). The current ICT policy in education is characterized by a restrictive and ahistorical view that considers these technologies to be exclusively computers (hardware and software) and online platforms shaping the modernization and progress of education. Educational technologies, however, have a long history, ranging from the textbook and object lessons to the computer and tablet, the magic lantern, the pneumatic machine, the filmmaking camera, the ripple tank, programmed instruction and the television circuit. Building a sound understanding of science pedagogy through the history and philosophy of technology means accepting that these technological devices originated in a particular pedagogical and socio-political context and, vice versa, that every educational technique or technology integrates particular pedagogical elements in its design. These do not absolutely determine their uses, but they do qualitatively structure the horizon of possibilities for the practice of teaching.*

Key words: *ICT, education, computers, pedagogy, didactics, educational technology*

És 15 de maig de 2018, plou a bots i barrals a Bogotà, capital de Colòmbia, i al Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario —una de les principals universitats formadores de les elits polítiques del país— se celebra el Día del Maestro. El programa inclou alguns afalacs i protocols socials per a una part del personal de la institució, i una conferència magistral impartida des dels últims anys per un «ex-

pert» internacional. Enguany és el torn d'Anant Agarwal, enginyer d'origen indi, format a la Universitat de Stanford, que dirigeix el Laboratori de Ciències de la Computació i Intel·ligència Artificial al Massachusetts Institute of Technology (MIT). Agarwal és la cara visible i comercial de la plataforma edX de cursos en línia, i la faramalla aparentment pedagògica i professional de l'acte encobreix un objectiu principal: la signatura —en presència de la premsa— d'un conveni entre aquesta empresa i el Colegio. L'estratègia és doble i en teoria convé a les dues parts. D'una banda, afavoreix la penetració d'aquest projecte estatunidenc a Amèrica Llatina. De l'altra, la institució privada colombiana participarà en la producció d'alguns continguts de cursos en castellà que podrien beneficiar-se del segell edX en la seva circulació internacional.

Els titulars de premsa indiquen que Agarwal ha tingut un paper clau a l'hora de «democratitzar a Harvard y al MIT» i «acercar a las universidades de élite [...] a personas de todo el mundo por medio de internet». A la seva conferència, impartida en anglès, explica que el projecte començà com una manera de compartir materials de cursos entre les dues institucions de Cambridge, Massachusetts. Posteriorment, el projecte es va expandir internacionalment. Ofereix la possibilitat de fer cursos en línia oberts i massius (MOOC, *massive open online course*) gratuïtament (sense supervisió de professor), de certificar-los (pagant) i de fer itineraris (pagant) que configuren «micromàsters» (Vida UR, 2018a i 2018b; Rey, 2018a i 2018b). El format ofereix ingressos addicionals a aqueixes universitats, així com una eina efectiva de comunicació i propaganda. Els veritables títols d'universitats com Harvard i MIT, en l'àmbit de grau i màster —altament rendibles al mercat laboral—, continuen tenint preus inassolibles per a la majoria d'estudiants (Chetty *et al.*, 2017). Tot i les diferències, la situació és anàloga quant a l'accés a l'educació superior a Colòmbia i l'estatus de col·legis universitaris com el del Rosario (Cuenca, 2016; Gómez, 2015). La conferència d'Agarwal transita, però, per altres tonalitats, explotant l'imaginari triomfal del geni que tots portem dins i les possibilitats infinites de l'«American dream» (Akin, 1977). Agarwal no evita l'humor i les referències domèstiques per bastir una imatge entusiasta i interessadament ingènua del poder infal·lible de les tecnologies de la informació i la comunicació (vessant electrònic i digital) per millorar automàticament no només la quantitat i qualitat educativa, sinó també qualsevol aspecte de la vida d'una persona. Finalitza recomanant encaridament al Govern colombià que no finance la construcció de noves escoles al país, que tinga seny i invertisca directament en xarxes d'Internet a dojo.

En un país com Colòmbia, on la cobertura i qualitat de l'educació pública escolar és altament deficient per dècades de polítiques neoliberals de desinversió pública, suggeriments com aquests semblen si més no fraudulents i en gran mesura impúdics. En el breu torn obert a preguntes del públic en l'acte celebrat al Jockey Club, algunes veus crítiques s'alcen de manera molt minoritària entre el professorat: «Realment edX solucionarà els problemes de l'educació colombiana? Vostè sap quins són? Realment creu vostè que companyies estatunidenques com Netflix, Uber i Airbnb ofereixen un millor servei de cinema, transport i allotjament, respectivament, que el que teníem prèviament? Llavors, pot realment una plataforma en línia substituir qualitativament la tasca que desenvolupem els professors? I per què aquesta tecnologia en concret podrà revolucionar el que prèviament no revolucionà ni la ràdio ni la televisió, entre d'altres, amb promeses anàlogues a les que estem escoltant hui ací?» Els escèptics de torn tenen ganes de rebentar un acte de comunió programada com el que té la seva culminació a continuació: signatura del conveni, encaixada enèrgica de mans entre l'emprenedor estatunidenc i el rector colombià, flaixos fotogràfics, cossos erectes de la plana major d'aquesta empresa privada universitària. Agarwal és aquest Melquíades qualsevol que ve a meravellar el nostre Macondo particular amb la seva ciència i ginys vinguts de lluny (García, 1967).

Per damunt de les particularitats de lloc i temps, l'escena narrada suava, segurament ressonarà amb familiaritat en la imaginació de la lectora o el lector d'aquest text. És la imatge del mag estranger que amb els seus encants tecnològics ens salvarà dels nostres problemes i de la màquina universal que resoldrà totes les nostres mancances pedagògiques sense cap precondició excepte que acceptem automàticament la seva superioritat. No és una faula de Gabriel García Márquez, sinó que forma part de la realitat politicocultural quotidiana de les nostres institucions educatives. A Amèrica Llatina, a Europa o arreu del món. Per a un docent experimentat o un historiador de l'educació, l'experiència d'escoltar per enèsima vegada el mateix discurs pot arribar, però, a ser una mica fatigós. Les tecnologies tenen indubtablement un impacte molt important en activitats de la nostra vida com l'educació, i projectes com edX són d'indubtable interès. Tota tecnologia educativa té, però, una filosofia pedagògica particular integrada al seu disseny, que és necessari visibilitzar. I si el docent i l'estudiant no tenen capacitat per decidir críticament quines tecnologies necessiten (i quines no) i per intervenir en el seu disseny, ens quedem en discursos propagandístics que van del tecnodeterminisme al tecnosupremacisme amb dosis generoses d'agnotologia històrica i pedagògica i la preponderància dels interessos empresarials sobre els educatius. Cal recordar que Agarwal o edX, i tants altres propagandistes de la tecnoeducació, no tenen cap formació en investigació educativa ni han considerat necessari incloure aquest tipus d'experts als seus equips de treball (Simon, 2019a; Hamilton i Feenberg, 2012; Ames, 2019; Sclove, 1995).

La importància d'Amèrica Llatina per als assaigs de solucions tecnològiques dissenyades als Estats Units és condensada en exemples com el que acabem d'exposar o altres projectes com «One laptop per child» (OLPC) o «Computers for schools». Una gran part de la literatura que referencia projectes com aquests replica de manera literal i acrítica les declaracions triomfalistes dels seus desenvolupadors. Tanmateix, s'està també desenvolupant un cos creixent de treballs que, des dels estudis de ciència i tecnologia, analitzen de manera més crítica i basada en evidència empírica les llums i ombres d'aquests projectes pretesament modèlics. En 2012, més del 80 % de la projecció internacional (repartida entre quaranta-sis països) de l'OLPC —un altre projecte produït al MIT— es concentrava en deu països d'Amèrica Llatina. Investigacions detallades de la seva implantació a Perú i a Paraguai han mostrat realitats molt menys prometedores que les presentades per la propaganda empresarial i oficial. El programa de producció d'ordinadors portàtils i programari educatiu a baix cost fou pensat com una solució (tecnològica) global o universal, sense tenir en compte la diversitat cultural i educativa dels nombrosos països en què fou implantat, ni fer una indagació prèvia dels problemes principals del seu context escolar.

Per contra, en algunes regions de Perú, antropòlegs socials i enginyers locals, treballant mà a mà amb mestres, estudiants i pares, identificaren la necessitat fonamental tant de dissenyar programes de formació en l'ús de tecnologies educatives com aquestes com d'establir processos propis d'apropiació d'aquests i altres paquets tecnològics partint de les necessitats i problemes reals de l'educació en perspectiva local. Així, la tradicional concepció de «centre» i «perifèria» connectats per «difusió» —mantinguda pels dissenyadors del projecte— fou resignificada com un procés productiu de negociació amb una diversitat d'agents en zones rurals i urbanes de països considerats habitualment com perifèrics. Això, amb l'objectiu primordial de reconfigurar el disseny de certes tecnologies educatives per tal de poder fer-les valdre d'alguna manera per a la seva funció esperada. Anàlogament, la introducció dels portàtils OLPC en escoles d'ensenyament primari i secundari al Paraguai posà de manifest la dramàtica diferència entre els ideals pedagògics dels dissenyadors i la filosofia pedagògica re-

querida per aquestes escoles. Establir un compromís amb la cultura dels estudiants, mestres i pares de les escoles paraguaianes era un aspecte fonamental en el qual paradoxalment les ments pensants del MIT no havien caigut. Les perspectives dels líders del projecte OLPC, a més de tecnodeterministes, es caracteritzen pel que podríem denominar *fetixisme conceptual de les màquines*. En aquest sentit, el procés de distribució i comunicació dels seus productes sí que fou efectiu: el treball etnogràfic desenvolupat per investigadors independents a les escoles paraguaianes mostrà com els estudiants, mestres i pares associaven a les màquines distribuïdes una qualitat que podríem denominar com *carisma*. Consideraven que els portàtils eren sens dubte eines amb capacitats notables que contribuirien a millorar l'ensenyament a les seves aules. El problema, però, era que ells no tenien les habilitats i els coneixements necessaris per ser capaços d'emprar-los adientment. Els objectes tenien en essència *carisma*, concentrant els imaginaris i les expectatives de tot ciutadà paraguaià d'allistar-se en el moviment del progrés representat per la nova societat de la informació promoguda políticament pel seu Govern nacional. Les limitacions o falles dels productes OLPC i la seva manca d'adaptació a les necessitats escolars quedaven eclipsades per aquest ideal universal. Es poden extraure conclusions similars de l'estudi d'altres casos com el de «Computadores para educar» a Equador o «Tabletas para educar» a Colòmbia (Chan, 2014 i 2018; Ames, 2019; Albornoz *et al.*, 2012; Martínez, 2019).

Projectes com els presentats en els paràgrafs previs han assumit invariablement que Amèrica Llatina era un continent buit i incapaç de dirigir els seus propis destins, un espai a civilitzar o a beneficiar amb produccions tecnològiques concebudes des d'Europa o els Estats Units. El cert, però, és que, en l'àmbit de la innovació pedagògica i la concepció i ús de tecnologies per a l'educació formal, els països llatinoamericans han tingut un paper important en la història internacional. Si revisem, per exemple, les patents o privilegis atorgats a la Ciutat de Mèxic durant el segle XIX per a invents tecnològics adreçats a l'ensenyament, trobem una sèrie de propostes amb noms tan suggeridors com «Màquina para resolver cualquier problema aritmético, llamada “Contador infalible”», «Aparato para enseñar a leer, llamado “Silabario mecánico”», «Màquina para estacigencias de escritura (1869)», «Pizarras calcantes», «Màquina intuitiva para la enseñanza de las escuelas», «Caleideslojico»... Els seus autors són en general poc coneguts, eren mexicans (en contrast amb les patents tecnològiques connectades amb la indústria habitualment signades per estrangers) i eren mestres (en escoles públiques o privades), mecànics o comerciants (Beatty i Sáiz, 2007). Els seus invents inclogueren tècniques de lectura, escriptura i càlcul, i artefactes tecnològics que integraven diferents assignatures escolars en forma de sistemes pedagògics, caixes enciclopèdiques i màquines d'ensenyament (Granja, 2004; Simon, 2019a).

Entre aquestes últimes, per exemple, en 1887, Pomposo Becerril, un artista i mestre que dirigia l'Escola d'Arts i Oficis de Toluca, la capital de l'estat de Mèxic, presentà una sol·licitud per a una patent sobre un mètode per a l'ensenyament combinat de la geografia i l'aritmètica, dissenyat com un joc de taula. Un altre mestre al mateix estat, Clemente Antonio Neve, proposà un sistema d'instrucció escolar per ensenyar la lectura, escriptura, aritmètica, gramàtica, cosmografia, geografia física i política i història, a través d'una sèrie de calaixeres que contenien lletres de colors, números i boles, niots, mostres d'escriptura, imatges, diagrames, pissarres, panells quadrats i circulars i un assortiment de taules circulars. Neve és conegut per la seva ferma defensa del mètode d'ensenyament denominat *ensenyament intuïtiu* o *ensenyament objectiu* que organitzava l'educació al voltant de la manipulació d'objectes senzills i quotidians i l'ús dels sentits per part dels estudiants. Per exemple, emprà rosaris per ensenyar matemàtiques, com una manera de materialitzar l'aritmètica. Fou també l'inventor

d'una «màquina intuïtiva per a l'ensenyament de les escoles», un cub (que ocupava un volum d'un metre cúbic) amb diferents figures mòbils connectades a les seves cares. Cada peça mòbil tenia informació impresa en la seva superfície i estava connectada amb el cub per eixos que permetien girar-les. Alguns d'aquests discs tenien també altres peces que permetien inserir-hi boles de colors. Segons Neve, treballant amb aquesta màquina dues hores al matí i altres tantes a la vesprada, l'estudiant aconseguiria un aprenentatge escolar correcte. Amb aquest sistema mecànic plantejava ensenyar la lectura, escriptura, aritmètica, gramàtica, geografia i cosmografia per mitjà d'homologies aritmètiques, geomètriques i cromàtiques entre síl·labes, nombres i planetes a través de les diferents combinacions de discs i boles en la màquina. En la seva patent, Neve es referí a la màquina lògica inventada per Ramon Llull al segle XIII i indicà que la seva màquina, resultant d'una experiència de tres dècades com a mestre, havia sigut premiada el 1879 a l'Exposició Anual d'Agricultura i Mecànica de Saint Louis, Missouri, als Estats Units, i una fira similar celebrada a la ciutat mexicana de Puebla (Simon, 2019a; Granja, 2004).

El cas de les patents mexicanes a finals del segle XIX és un entre molts, en una història llarga de producció i ús de tecnologies educatives en les escoles a Amèrica Llatina. En aquestes breus pinzellades podríem mencionar també el desenvolupament a partir dels anys vint del segle XX de programes de cinema educatiu a països com Mèxic, Brasil, Argentina o Xile (a un ritme similar al d'Europa) i, a mitjan segle, l'establiment de xarxes de televisió amb programacions específiques dissenyades per a l'escola primària i secundària (incloent-hi classes de ciències). Des de finals dels anys vint, Xile disposà d'un Instituto de Cinematografía Educativa, i Mèxic col·laborà amb l'institut internacional dedicat a aquesta tecnologia educativa establert a Roma. Als anys quaranta, a Argentina, el Govern inaugurava el Departamento de Radioenseñanza y Cinematografía Escolar. Entre els anys cinquanta i seixanta, amb el suport de la UNESCO, el Govern mexicà establia al seu país l'Instituto Latinoamericano de Cinematografía Educativa, mentre que amb suport de l'Organització dels Estats Americans s'establia un centre llatinoamericà de televisió educativa, amb seus als tres països mencionats i a Colòmbia, centrat en la producció de programes i la formació de professionals per a aquest nou marc educatiu i tècnic. Al mateix període, a la Universitat Nacional Autònoma de Mèxic s'establia un servei d'educació audiovisual i un programa de treball per al disseny i introducció racionalitzada de tecnologies educatives audiovisuals a les escoles mexicanes que presentava centenars d'aquest tipus de materials en cinc classes, en el marc d'una organització denominada *Clasificación México*. Cadascuna d'aquestes modalitats d'ensenyament audiovisual estava vinculada a tècniques i filosofies pedagògiques específiques indicades explícitament en els programes formatius corresponents destinats als mestres, amb la intenció d'evitar la improvisació i assegurar que la introducció de tecnologies com aquestes a l'aula es donava per lògiques pedagògiques i no per les pressions del mercat de les tecnologies educatives. Al capdavant, com indicava el director d'aquest servei: «La proyección filmica, aplicada con anarquía y falta de sistematización pedagógica es uno de los más grandes males que amenazan actualmente a nuestro sistema de educación nacional» (Simon, 2019).

En paral·lel, a Brasil s'innovava en el disseny i producció d'equips per a l'ensenyament de les ciències experimentals en el marc d'un programa de reforma de l'ensenyament de les ciències equivalent en certs aspectes als programes anàlegs desenvolupats als Estats Units al voltant de la física, la química i la biologia durant els anys seixanta i setanta. Al primer simposi nacional sobre l'ensenyament de la física organitzat en 1970 per la Sociedade Brasileira de Física, Antônio S. Teixeira Jr., professor a la Universitat de São Paulo, discutí la pertinència d'emprar el concepte de *tecnologia*

*educativa* per referir-se a les eines fonamentals de l'ensenyament de les ciències i com a concepte superador del tradicional llibre de text. Brasil tingué també un paper important en el desenvolupament de la tècnica pedagògica denominada *instrucció programada* a través del pla Keller inspirat en el sistema d'instrucció personalitzada que el psicòleg del comportament Fred S. Keller dissenyà i assajà per primera vegada a final dels anys seixanta en interacció amb investigadors de la nova Universitat de Brasília. En el mateix període, Brasil fou també pioner al continent llatinoamericà en la producció d'ordinadors personals i en la seva introducció en l'ensenyament. Sérgio Mascarenhas, director de l'Institut de Física de la Universitat Federal de São Paulo, considerà que la gran revolució del segle xx no serien els satèl·lits o la física nuclear, sinó la producció d'una tecnologia educativa completament nova que empraria ordinadors, televisió i cintes i pel·lícules magnètiques, entre altres. Segons ell, aquest seria un mercat sense límit i la introducció dels ordinadors en l'aula gairebé podria substituir els professors. Al final de la seva carrera, Mascarenhas reconeixia, però, les limitacions d'aquesta previsió utòpica, així com el paper ineludible del professor en l'assumpte educatiu. En 1989, en la segona edició d'un volum de revisió dedicat a la revolució de la computadora, recordava que per més de dues dècades s'havia afirmat recurrentment que els ordinadors estaven a punt de revolucionar l'educació, sense que això passés de fet (Simon, 2019a i 2019b).

Quan Agarwal entrà al Jockey Club enfundat en el seu vestit de Melquíades desconeixia la densitat històrica de les tecnologies educatives a Amèrica Llatina. De manera majoritària, els assistents a l'acte, però, entengueren intuïtivament els tres actes de l'obra, abocada a un final comercial de comèdia romàntica. Els ordinadors, les tauletes tàctils i les plataformes en línia estan envaint de manera poc subtil el nostre pensament i les pràctiques d'aprenentatge, i són referència ineludible en les polítiques governamentals i els discursos internacionals sobre el desenvolupament socioeconòmic. Tanmateix, les màquines electròniques no són més que un tipus de tecnologia educativa entre una mostra molt extensa d'objectes tecnològics dissenyats per a l'acció educativa des d'almenys el segle XIX. Retrospectivament podem veure que la majoria de les tecnologies educatives estigueren dotades, en el moment de la seva introducció innovadora, d'un carisma que contribueix a enfosquir la substància de la seva contribució a l'ensenyament i l'aprenentatge. Malgrat l'escalada tècnica de les nostres societats i el poder innegable de les tecnologies educatives, una anàlisi històrica demostra que l'educació està encara en mans de docents i alumnes humans, les pràctiques dels quals estan també configurades per elements socioculturals connectats a ubicacions geopolítiques particulars. Les tecnologies serien incapaces *per se* de dur a terme l'educació i produir el canvi educatiu, i en tot cas és necessari conèixer-les i apropiar-se-les per tal de poder emprar-les amb seny. Això, que potser siga obvi per als historiadors de la tecnologia, és encara un punt important sobre el qual insistir als investigadors educatius i als professionals que produeixen les polítiques públiques. La historització de la tecnologia educativa i les seves pràctiques educatives és un deure ineludible per trobar un punt intermedi entre el realisme màgic i el realisme tràgic, i poder així dissenyar un futur educatiu més satisfactori.

## Referències bibliogràfiques

- AKIN, W. E. (1977). *Technocracy and the American dream: The technocrat movement, 1900-1941*. Berkeley: University of California Press.
- ALBORNOZ, M. B.; BUSTAMANTE SALAMANCA, M.; JIMÉNEZ BERCERRA, J. (2012). *Computadores y cajas negras*. Quito: Flacso Ecuador.
- AMES, M. G. (2019). *The charisma machine: The life, death, and legacy of one laptop per child*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- BEATTY, E.; SÁIZ, P. (2007). «Propiedad industrial, patentes e inversión en tecnología en España y México (1820-1914)». A: DOBADO, R.; GÓMEZ GALVARRIATO, A.; MÁRQUEZ, G. (ed.). *México y España ¿historias económicas paralelas?*. Mèxic: Fondo de Cultura Económica, p. 425-467.
- CHAN, A. S. (2014). «Balancing design: OLPC engineers and ICT translations at the periphery». A: MEDINA, E.; COSTA MARQUES, I. da; HOLMES, C. (ed.). *Beyond imported magic: Essays on science, technology and society in Latin America*. Cambridge, MA: The MIT Press, p. 181-206.
- (2018). *Periferias en red: Futuros tecnológicos y el mito del universalismo digital*. Lima: Instituto de Estudios Peruanos.
- CHETTY, R.; FRIEDMAN, J.; SAEZ, E.; TURNER, N.; YAGAN, D. (2017). «Mobility report cards: The role of colleges in intergenerational mobility». *NBER Working Paper* [en línia], núm. 23618. <<https://ssrn.com/abstract=3007490>> [Consulta: 10 novembre 2020].
- CUENCA, A. (2016). «Desigualdad de oportunidades en Colombia: impacto del origen social sobre el desempeño académico y los ingresos de graduados universitarios». *Estudios Pedagógicos*, vol. XLII, núm. 2, p. 69-93.
- GARCÍA MÁRQUEZ, G. (1967). *Cien años de soledad*. Buenos Aires: Sudamericana.
- GÓMEZ, V. M. (2015). *La pirámide de la desigualdad social en la educación superior en Colombia: Diversificación y tipología de instituciones*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- GRANJA CASTRO, J. (2004). *Métodos, aparatos y máquinas para la enseñanza en México en el siglo XIX: Imaginarios y saberes populares*. Barcelona; Mèxic: Pomares.
- HAMILTON, E.; FEENBERG, A. (2012). «Alternative rationalizations and ambivalent futures: A critical history of online education». A: FEENBERG, A.; FRIESEN, N. (ed.). *(Re) inventing the internet: Critical case studies*. Rotterdam: Sense Publishers, p. 43-70.
- MARTÍNEZ BERRIO, A. (2019). *¿Dame una tablet y moveré el mundo? La apropiación de las tabletas para educar en una escuela del municipio de Gigante, Huila*. Tesis de màster. Bogotá: Universidad del Rosario.
- REY, G. H. (2018a). «Llega a Colombia el revolucionario de la educación 'online'». *Portafolio* [en línia] (3 maig). <<https://www.portafolio.co/innovacion/llega-a-colombia-el-revolucionario-de-la-educacion-online-gloria-helena-rey-516789>> [Consulta: 10 agost 2020].
- (2018b). «La educación debe usar la tecnología para llegar a más personas». *El Tiempo* [en línia] (17 maig). <<https://www.eltiempo.com/vida/educacion/anant-agarwal-habla-sobre-la-tecnologia-y-la-educacion-en-el-mundo-217870>> [Consulta: 12 juliol 2020].
- SCLOVE, R. E. (1995). *Democracy and technology*. Nova York: The Guilford Press.
- SIMON, J. (2019a). «Machines and texts: Writing the history of educational technology in Latin America». *History of Technology*, 34, p. 107-125.
- (2019b). «The transnational physical science study committee: The evolving nation in the world of science and education (1945-1975)». A: KRIGE, J. (ed.). *How knowledge moves: Writing the transnational history of science and technology*. Chicago: University of Chicago Press, p. 308-342.
- VIDA UR (2018a). «Día del profesor en la era digital». *Nova et Vetera* [en línia] (30 abril). <<https://www.urosario.edu.co/Periodico-NovaEtVetera/Nuestra-U/Dia-del-profesor-en-la-era-digital/>> [Consulta: 1 setembre 2020].
- (2018b). «Los profesores rosaristas re-imaginan la educación». *Nova et Vetera* [en línia] (18 maig). <<https://www.urosario.edu.co/Periodico-NovaEtVetera/Nuestra-U/Los-profesores-Rosaristas-re-imaginan-la-educacion/>> [Consulta: 1 setembre 2020].





## TEXTOS HISTÒRICS PER A L'APRENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES. EL CAS DELS NOMBRES NEGATIUS

**FÀTIMA ROMERO VALLHONESTA;<sup>1</sup> M. ROSA MASSA-ESTEVE;<sup>2</sup> IOLANDA GUEVARA CASANOVA;<sup>3</sup> CARLES PUIG-PLA<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

<sup>2</sup> DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

<sup>3</sup> DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT, GENERALITAT DE CATALUNYA, I UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

Paraules clau: *aprenentatge de matemàtiques, nombres negatius, textos històrics*

### Historical texts for teaching mathematics. The case of negative numbers

*Summary: The activities based on the analysis of historical texts help to improve the integral education of students, while providing them with additional knowledge about the social and scientific context of the periods involved. Students gain a vision of mathematics not as a final product, but as a useful, human, interdisciplinary and heuristic science which has been developed by trying to answer the questions that humanity has posed throughout time with respect to the world around us. Through our experience as teachers, we have realized that many students have difficulty understanding and handling negative numbers. Accordingly, this paper presents an analysis of some relevant historical texts that deal with negative numbers. On the basis of these texts, classroom activities can be designed with contents related to numbering, which forms part of the numbering and calculation block of the curriculum. In addition, students can work with problem-solving, reasoning and proof processes in these activities, thus addressing connections, communication and representation.*

Key words: *teaching mathematics, negative numbers, historical texts*

### Introducció<sup>1</sup>

L'estudi de la història del pensament és necessari per tal d'entendre les dificultats epistemològiques que poden tenir els alumnes en l'aprenentatge d'alguns concep-

---

1. Aquest treball s'inclou en el projecte HAR2016-75871-R del Ministeri d'Economia i Competitivitat espanyol.

tes. En el cas dels nombres negatius, pot semblar que els alumnes en tenen incorporada la noció, ja que en la vida quotidiana es troben amb temperatures negatives, dates que s'expressen amb nombres negatius i també estan familiaritzats amb els nombres negatius que hi ha en alguns ascensors, per citar-ne alguns exemples. De tota manera, el pas de donar sentit a quantitats negatives aïllades i manipular-les no és senzill.

Les activitats basades en l'anàlisi de textos històrics relacionats amb el currículum contribueixen a millorar la formació integral dels alumnes i els proporcionen alhora un coneixement addicional del context social i científic dels períodes involucrats.<sup>2</sup> El fet de treballar amb textos històrics permet als alumnes adonar-se d'algunes de les dificultats que hi ha hagut al llarg de la història per tal que determinats continguts fossin adoptats per la comunitat científica. No es tracta de fer repetir als alumnes el camí recorregut al llarg de la història fins que els negatius van tenir la consideració de nombres, però el coneixement d'aquest camí per part del professorat permet triar textos significatius que els ajudin a aplanar-lo.

En aquesta comunicació presentem diversos textos rellevants pel que fa a la història dels nombres negatius, a partir dels quals es poden dissenyar activitats d'aula que contribueixin a la comprensió d'aquests nombres per part de l'alumnat.

### **Els currículums de primària<sup>3</sup> i secundària obligatòria<sup>4</sup>**

En el currículum de l'educació primària apareixen els nombres negatius en el cicle superior, concretament en el bloc de numeració i càlcul. L'ítem que hi fa referència diu: «Interpretació dels nombres negatius en contextos significatius i reals». Es tracta, per tant, que els alumnes entenguin les expressions amb nombres negatius que poden trobar en contextos de la vida quotidiana com pot ser el cas de la temperatura a què fèiem referència en la introducció.

En el currículum de l'educació secundària obligatòria els nombres negatius apareixen en el primer curs, també en el bloc de numeració i càlcul. Els ítems que hi fan referència són els següents:

- Significat en contextos diversos. Expressió de valors o variacions (quantitats, valor monetari, temps, temperatures...).
- Comparació i ordenació.
- Els nombres indoaràbics, la introducció del zero i els nombres negatius en la història de les matemàtiques.
- Representació gràfica (recta numèrica).
- Càlcul mental amb enters i fraccions.

En el cas de secundària també es fa referència al context i es posen exemples de la vida quotidiana, com a primària.

2. El nostre grup d'història de les matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) fa més de vint anys que desenvolupa aquesta recerca. Dues de les publicacions més recents són: Romero i Massa-Esteve (2019) i Guevara i Puig-Pla (2019).

3. Decret 119/2015, de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària.

4. Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria.

La representació gràfica a què es fa referència en un dels ítems pot suggerir una idea més abstracta dels nombres negatius, tot i que també pot ser una manera de representar situacions quotidianes. De fet, però, la recta numèrica ha estat qüestionada per aprendre quantitats negatives, ja que el seu ús es limita a sumes i restes (Heeffer, 2011). No funciona en tractar proporcions ni divisions amb nombres negatius. A més a més, les dificultats més importants per comprendre els nombres negatius fan referència a les multiplicacions i divisions. La multiplicació de dos nombres negatius suscita molts dubtes i, tot i que es poden trobar exemples imaginatius per tal que els alumnes recordin que el producte de dos nombres negatius és positiu, la raó que sigui així és la coherència dels càlculs.

Alguns autors se sorprenien amb la igualtat:  $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ , ja que un nombre (-1) dividit per un de més gran (1) no pot donar el mateix que el gran (1) dividit pel petit (-1) (Mancosu, 1996).

On es fa referència als nombres negatius com a quantitats aïllades és en el darrer ítem sobre el càlcul mental. És molt necessari, doncs, l'ítem que fa referència a la introducció històrica dels nombres negatius per tal que el pas de situacions de context a situacions més abstractes pugui vèncer les dificultats epistemològiques que presenta la introducció d'aquests nombres.

### Textos històrics significatius sobre els nombres negatius

Molts dels textos històrics que tracten directament amb nombres negatius estan relacionats amb el desenvolupament de la resolució d'equacions algebraiques. De fet, aquests materials representen una font d'idees per millorar-ne l'ensenyament. Encara que els textos que es presenten pertanyen quasi tots al Renaixement, cal recordar que els àrabs en la seva presentació de l'àlgebra empenen l'operació de la restauració (eliminació dels termes negatius en una igualtat) abans de resoldre les equacions. I encara abans, textos matemàtics xinesos del segle I (*Nou capítols dels procediments matemàtics*), i autors grecs del segle III (Diofant) i indis del segle VII (Brahmagupta) van donar regles per treballar amb els nombres negatius relacionades, en tots els casos, amb la resolució d'equacions (Guevara, 2009).

### El tractament dels negatius al món àrab

Els àrabs van tenir un paper fonamental en el desenvolupament de l'àlgebra i de la trigonometria, alhora que van fer contribucions importants a la física, l'astronomia, l'alquímia i la medicina. Van recollir el saber grec i indi, i van millorar i transformar aquests coneixements a partir dels recursos de la seva pròpia civilització (Benoit i Micheau, 1991).

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, matemàtic, astrònom i membre de la Casa de la Saviesa de Bagdad, que va morir el 850 dC, és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra. La seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqabala* (813) va ser traduïda al llatí per Robert de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual *àlgebra*.

Al-Khwarizmi, al començament de la seva obra *Hisâb al-jabr wal-muqabala*, explica la seva utilitat per resoldre problemes.<sup>5</sup> L'obra d'al-Khwarizmi constava d'una part teòrica amb el mètode per resoldre equacions amb coeficients positius (que classificava en sis tipus, fins a segon grau) i d'una

5. «El meu propòsit és compondre una obra breu sobre el càlcul per les regles de compactació i reducció, limitant-nos al que és a la vegada més fàcil i més útil en l'aritmètica, i que els homes necessiten constantment en els casos d'herències, llegats, particions, plets així com en el comerç i en totes les relacions dels uns amb els altres, o bé on es necessiten mesures de terres, excavacions de canals, càlculs geomètrics i altres assumptes de molts diversos tipus.» (Rosen, 1831: 3; la traducció és nostra.)

part pràctica que contenia problemes ilustratius de cadascun dels tipus: problemes de nombres, de comerç, de dots, del blat i la civada, dels exèrcits i dels correus.

Totes les altres àlgebres àrabs, basades en aquesta, seguien la mateixa estructura.<sup>6</sup> Les equacions les classificaven en sis tipus, amb coeficients positius, sense escriure cap símbol, és a dir, en forma retòrica: «Quadrats igual a arrels»,<sup>7</sup> «Quadrats igual a nombres»,<sup>8</sup> «Arrels igual a nombres»,<sup>9</sup> «Quadrats i arrels igual a nombres»,<sup>10</sup> «Quadrats i nombres igual a arrels»,<sup>11</sup> «Arrels i nombres igual a quadrats».<sup>12</sup>

Primer donaven, també amb llenguatge retòric, l'algorisme de resolució de cadascun dels tipus mitjançant un exemple numèric i, després, en la part pràctica, cada vegada que en un problema plantejaven una equació, en donaven el tipus i la solució, sense fer les operacions. No empraven els negatius i, de fet, el terme *al-jabr* ('chéber' o 'restauració') significa eliminar totes les quantitats de l'equació que tinguin signe negatiu, *wa* ('i'), i *al-muqabala* ('reducció') significa agrupar els termes de la mateixa espècie.

### **La regla dels signes a Fibonacci**

Qui va difondre en el món occidental els coneixements de les regles algebraiques dels àrabs va ser Leonardo de Pisa (1180-1250), fill d'un cònsol, anomenat Bonacci, conegut ara amb el nom de Fibonacci, però a l'època era citat com a Leonardo Pisano. Va aprendre els càlculs i les tècniques mercantils dels àrabs. Va escriure: *Liber abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225) i *Liber quadratorum* (1225).

A la seva obra *Liber abaci* (1202), hi proposa els problemes que va aprendre a resoldre a les àlgebres àrabs així com els mètodes de càlcul de la numeració índia. *Liber abaci* conté en el seu últim capítol les regles de *chéber* i *al-muqabala*. Els temes que tracta en els diferents capítols són els següents: en els primers set capítols introdueix els nombres indoaràbics i els seus mètodes de càlcul, en els capítols del 8 a l'11 resol problemes de mercaders, en els capítols 12 i 13 resol problemes recreatius que plantegen equacions, en el capítol 14 explica el càlcul d'arrels quadrades i cúbiques, i dels binomis, i en el capítol 15 tracta de les regles geomètriques i dels problemes d'àlgebra i *al-muqabala*.

De fet, Fibonacci (Leonardo de Pisa) en la seva obra *Liber abaci* de 1202 no accepta els nombres negatius i els anomena *sords*,<sup>13</sup> en canvi sí que empra, en el capítol 14, sense justificar-ho, la regla dels signes en multiplicar binomis amb signe menys.

### **El Renaixement**

El període comprès entre mitjans del segle XIV i començaments del XVII va ser l'època del Renaixement, així anomenada pel ressorgiment o renaixement de l'interès per la Grècia i la Roma de l'anti-

6. S'anomenen *àlgebres* les obres amb contingut algebraic.

7.  $x^2 = bx$ .

8.  $ax^2 = c$ .

9.  $bx = c$ .

10.  $ax^2 + bx = c$ .

11.  $ax^2 + c = bx$ .

12.  $ax^2 = bx + c$ .

13. De fet, els nombres negatius s'anomenaven també *ficticis*, *falsos*, *imaginariis*, *quimèrics*, *absurds* o *quantitats inferiors a res* i el seu estat romania encara sense classificar en el segle XVII.

guitat clàssica. El llatí i el grec eren les claus indispensables per a l'estil, els coneixements i el bon gust, i van assumir un significat fonamental en l'educació que es conservaria durant segles.

Va ser també el període dels grans viatges de descobriment que van ampliar els horitzons de la civilització occidental. Les riqueses del Nou Món van ajudar a desenvolupar les ja de per si creixents economies europees. La influència més gran del Renaixement en la tecnologia es va registrar en l'arquitectura. L'abandó de les formes gòtiques per l'arquitecte italià Leon Battista Alberti (1404-1472) i els seus successors, i la gradual difusió de l'estil neoclàssic palatí en l'edificació, des d'Itàlia fins a tot Europa, va implicar canvis en la tècnica de la construcció. Els arquitectes i constructors que van portar a terme els seus projectes van haver d'aprendre com construir grans cúpules catedralícies tals com la de Sant Pere de Roma, que Europa no havia vist mai anteriorment. El Renaixement va encoarjar artistes i artesans (orfebres com Cellini, pintors com Rafael) i a la vegada va modificar els objectius de les seves activitats. La Itàlia renaixentista del segle XVI, època molt rica culturalment, és l'època de Leonardo da Vinci, Miquel Àngel, Botticelli, Alberti i molts altres. També és l'època en què es comencen a recuperar directament els textos grecs i es tradueixen al llatí. A tall d'exemple podríem citar Federico Commandino (1506-1575), que tradueix les grans obres clàssiques d'Arquímedes, Ptolemeu, Euclides, Aristarc, etc.

Pel que fa a la matemàtica, es produeix la normalització dels caràcters numèrics indis introduïts a les aritmètiques mercantils, però l'àlgebra no és considerada encara una part independent dins de les matemàtiques. El saber de les aritmètiques mercantils i de les fonts orientals usades pels mercaders italians es recull en l'obra enciclopèdica de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venècia, 1494), que va tenir gran difusió a la seva època. En aquesta obra, hi trobem explicitada la regla dels signes: *via* vol dir 'per', *piu* vol dir 'més' i *meno* vol dir 'menys' (vegeu fig. 1).

p̄.r̄.	¶p̄iu.	via.	piu.	sempre.	fa.	piu.
2̄.r̄.	¶meno.	via.	meno.	sempre.	fa.	piu.
3̄.r̄.	¶p̄iu.	via.	meno.	sempre.	fa.	meno.
4̄.r̄.	¶meno.	via.	piu.	similiter anche.	fa.	meno. p̄ <sup>m</sup> .notandū.

FIGURA 1. Regla dels signes de Luca Pacioli.  
 FONT: *Summa*, Pacioli, 1494: f. 112v.

A la pàgina següent, a la *Distinctio 8. Tractatus primus*, Pacioli justifica la regla de multiplicar dos negatius i que resulti un positiu a partir de l'operació  $(10 - 2) \cdot (10 - 2) = 64$ . L'autor explica que aquesta multiplicació és  $8 \cdot 8 = 64$ , però que, si multipliquem el binomi, convindrà que el signe del 4 sigui positiu, cosa que correspon que menys per menys sigui més (vegeu fig. 2).

També Christoff Rudolff, a la seva obra *Coss* (1525), els anomena *nombres absurds* i, com altres autors posteriors, no reconeix els negatius, ni té en compte les solucions negatives d'una equació. El canvi es va produir al Renaixement amb l'obra algebraica de Gerolamo Cardano (Pavia, 1501 - Roma, 1576).

**Cardano anomena i reconeix els nombres negatius**

Una cinquantena d'anys més tard que Pacioli, Cardano va publicar la seva *Artis magna*, que va canviar la perspectiva de l'àlgebra dins la matemàtica. Era fill de Fazio Cardano (advocat milanès). Als dinou anys estudiava medicina a la Universitat de Pavia i als vint-i-sis anys va aconseguir el grau de doctor.

in questo modo arguendo. Et prendis se gratia exempli: et dilucidande veritatis (alcuna q̄  
 doue se interponga el men. Et sia chel se habi a multiplicare. 10. men. 2. via. 10. men. 2. Laque  
 multiplicatione reuera: non vol dire altro che. 8. via. 8. qual fa. 64. p̄derche. 10. mē. 2. vol dire  
 el resto de. 10. quando ne sia tanto tratto. 2. cioe. 8. Et questo stante (sicut est rei veritas) te p  
 uo'lo intento in questo modo. Et quero a te quello che tu voli che facia. m̄. via. m̄. poi che non  
 fa piu per te: conuerra che tu dica che facian men: quieramente tanto: cioe ne piu ene men. Et io  
 te prouano che non po fare men: e anco non po fare tanto. e p̄ma che non fa men. Et acio pro  
 uare bisogna presupponere el modo del multiplicare in tal quantita sorde. p̄deroche le vāno  
 impossibile: e sequitano del tuo ditto. Adonca el tuo ditto e falso: e impossibile: cioe che. m̄. v̄.  
 m̄. fac. m̄. Ma anco tanto. Et per consequente el nostro remane vero: cioe che piu via piu fa piu  
 Sicche men. 2. via men. 2. fa piu. 4. che gionto al mobile de. 60. fanno aponto. 64. che e el quest  
 to. Concio sia che ogni quantita multiplicata via che altra suoglia: bisogna (per la commune

FIGURA 2. Principi i final d'un fragment en el qual Pacioli justifica retòricament la regla del producte de dos signes negatius.

FONT: *Summa*, Pacioli, 1494: f. 113r.

L'any 1529 es va casar amb Lucia Bandareni, amb qui va tenir tres fills. Del 1552 al 1559 va viatjar a Escòcia, on la seva reputació com a metge es va consolidar. El 1560 va morir un dels seus fills a Pavia. El 1570 va ser empresonat per la Inquisició per haver dit que els esdeveniments de la vida de Jesús eren deguts a la influència dels estels. El 1571 va tornar a Roma i va escriure la seva biografia.

Els llibres escrits per Cardano sobre matemàtiques són: *Practica arithmetica* (1539); *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (1545) (vegeu fig. 3); *Liber de ludo aleae* (publicat el 1663).

*Artis magnae* té quaranta capítols. Els quatre primers són de caràcter general. El capítol v està dedicat a les equacions de segon grau. El capítol vi és una preparació per a la resolució de la cúbica.

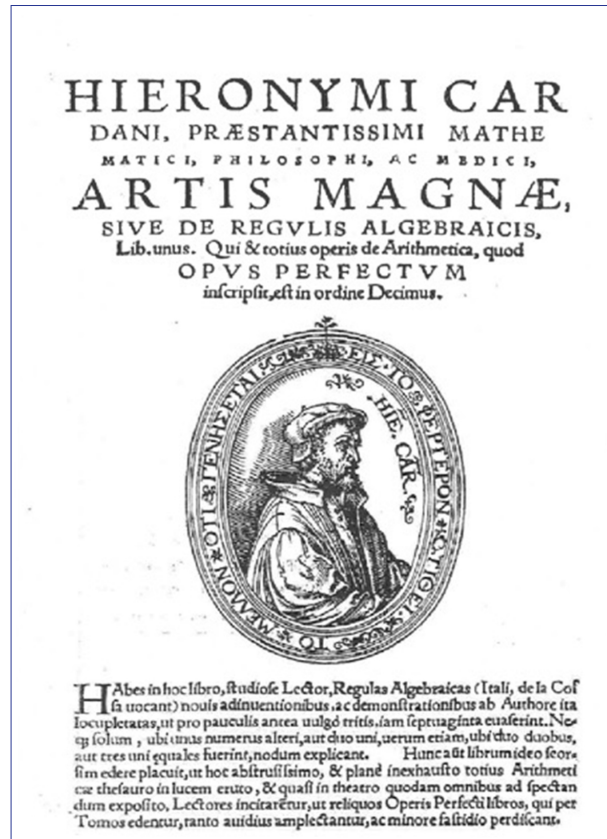


FIGURA 3. Portada de l'obra de Cardano sobre àlgebra *Artis magnae* (1545).

FONT: Cardano, 1545: portada.

El capítol VII tracta la transformació de les equacions. En el capítol VIII resol un tipus especial d'equacions. En els capítols IX i X analitza la solució de sistemes de dues equacions amb dues incògnites. En els capítols XI al XXIII s'estudien les solucions de la cúbica. En els capítols XXIV-XXVIII es tracten noves equacions i regles imperfectes. Els capítols XXIX-XXXVIII versen sobre regles de posició, regla àuria<sup>14</sup> i problemes pràctics d'aplicació. En el capítol XXXIX s'analitzen les equacions biquadrades i acaba l'obra amb diverses proposicions que constitueixen el capítol XL.

Amb aquesta obra de Cardano s'inicia un procés de maduració dels mètodes algebraics, com eines per a la resolució general de problemes. Comença l'algebrització dels problemes clàssics de geometria plana i la perspectiva d'emprar l'àlgebra no només per resoldre problemes específics sinó universals.

Al començament de l'obra, en el capítol primer, Cardano ja disserta sobre les potències senars i parelles per presentar els nombres negatius d'aquesta manera:

Ara recordem que hem mostrat que hi ha potències parelles i senars. El quadrat, el quadrat del quadrat, el cub del quadrat i així sempre són potències parelles, mentre que la primera potència, el cub i la cinquena i la setena potència són senars. Veritablement tant del 3 com del  $-3$  es fa 9, ja que menys per menys multiplicat produeix més. Però en el cas de potències senars cadascuna va segons la seva natura. No produeix més a menys que derivi d'un número vertader (positiu), i un cub que el seu valor és *menys* o el que nosaltres anomenem *debitum* no pot ser produït per cap expansió d'un número vertader (positiu). Cal recordar això molt clarament.<sup>15</sup>

Més endavant, en el capítol XXXVII d'*Artis magna*, titulat «De regula falsum ponendis» o bé «Regla de postular un negatiu», Cardano resol un problema posant un signe  $-$  al terme independent i arriba a una solució positiva i una de negativa, i, per tant, reconeix les solucions negatives.

Aquest problema és solucionat per la mateixa regla: divideix 6 entre dues parts, el producte de les quals és  $-40$ . Quadra 3, la meitat de 6, farà 9. Afegeix aquest a 40, donarà 49, l'arrel quadrada és 7 i afegeix-ho a 3, la meitat de 6, i disminueix i et donarà  $+10$  i  $-4$  que multiplicat produiran  $-40$  i, ajuntant, fan 6. Igualment  $-10$  i  $+4$  donarà  $-40$  quan multipliquem, i  $-6$  quan afegim. D'aquí que aquest problema és un d'un pur negatiu i pertany a la primera regla.<sup>16</sup>

La idea és que en el moment en què Cardano posa un signe negatiu al terme independent (la quantitat donada) de l'equació està acceptant una quantitat negativa com a solució del problema.

14. No té relació amb la raó àuria o divina proporció de Pacioli, és una regla per aproximar solucions que l'autor anomena *àuria*.

15. «Iam enim docuisse meminimus, quae sint impares, aut pares denominationes. Namque quadratum, & quadratum quadrati, cubumque quadrati, ac deinceps una semper intermissa pares, rem autem seu positionem, cubum, primum ac secundum. Relatum, impares vocamus denominationes. At vero quòd tam ex 3. quàm ex m.3. sit 9. Quoniam minus in minus ductum producit plus. At in imparibus denominationibus eadem servatur natura: seu quòd dicimus debitum, expositione ulla numeri veri produci potest, iam meminisse oportet dilucidius explicatur.» (Cardano, 1545: 222). La traducció al català d'aquest i de la resta de fragments citats és nostra.

16. «Per idem solvitur quaestio haec, fac ex 6. duas partes, quarum una in reliquam ducta, producatur m. 40. Duc 3. Dimidium 6. In se, sit 9. Adde ad 40 sit 49. Huius (arrel) quae est 7. Adde ad 3. Dimidium 6. & minue habebis 10. P. & 4. M. Quae ducta invicem producunt 40. m. & iuncta, faciunt 6.m. ideo etiam. Haec quaestio est de puro m. & pertinet ad primam regulam.» (Cardano, 1545: 287-288).



### Acceptació clara dels nombres negatius al segle XVII

Més tard, ja al segle XVII, i després de l'obra *In artem analyticen isagoge* (1591) de François Viète (1540-1603), es troben les primeres acceptacions clares de les arrels negatives a una equació de segon grau. Així, a l'obra *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629) d'Albert Girard (1595-1632) s'expressen les equacions amb les potències encerclades amb un nombre que correspon al seu exponent, i les operacions amb el signe més i menys, i emprant poques paraules (vegeu fig. 4, la traducció és nostra).

Quan els  $x^2$  (2) són iguals a  $x$  (1) i número (0)  
 Per exemple sigui  $5x^2$  igual a  $18x + 72$   
 La meitat del número de les  $x$  és +9  
 El seu quadrat +81  
 Al qual afegirem el producte de 5 vegades +72, que és +360  
 La suma +441  
 La seva arrel és +21  
 La qual afegida i restada del primer en aquest ordre  
 donarà 30 i -12  
 Cadascun d'aquests dividit per 5 donarà 6 i també -12/5  
 valors de  $x$

*Quand les (2) sont esgales à (1) (0)*  
*Par exemple soit 5 (2) esgale à 18 (1) + 72.*  
 la moitié du nombre des (1) est + 9  
 son carré + 81  
 auquel adjousté le produit de 5 fois + 72 qui est + 360  
 la somme + 441  
 sa  $\sqrt$  est + 21  
 lequel adjousté, & osté du premier en l'ordre 30  
 viendra } - 12  
 Chacun desquels divisé par le 5 viendra 6 aussi - 12/5  
 valeurs de 1 (1)

FIGURA 4. Girard ho presenta com una taula.

FONT: Girard, 1629: sense paginar.

### El tractament dels negatius (arrels falses) a *La géométrie* (1637) de René Descartes (1596-1650)

Un dels punts rellevants dins de l'evolució de l'àlgebra i, en concret, per a la resolució d'equacions algebraiques va ser l'edició de l'obra de Descartes titulada *La géométrie* (1637), que apareix com un apèndix del *Discours de la méthode* (vegeu fig. 5). L'obra està dividida en tres llibres: el primer titulat «Sobre els problemes de construcció que requereixen només línies rectes i cercles», el segon titulat «Sobre la naturalesa de les línies corbes» i el tercer titulat «Sobre la construcció dels problemes que són sòlids o quasi sòlids».<sup>17</sup>

17. El programa de Descartes inclou dos aspectes: d'una banda, la classificació de corbes en algebraiques i mecàniques i, d'altra banda, les construccions geomètriques de les corbes. A l'obra de Descartes, l'àlgebra i la geometria es relacionen a través de les construccions de la intersecció de les corbes (quasi sempre paràboles i circumferències) que expressen les solucions d'equacions algebraiques (adequadament preparades) de grau més gran que dos.

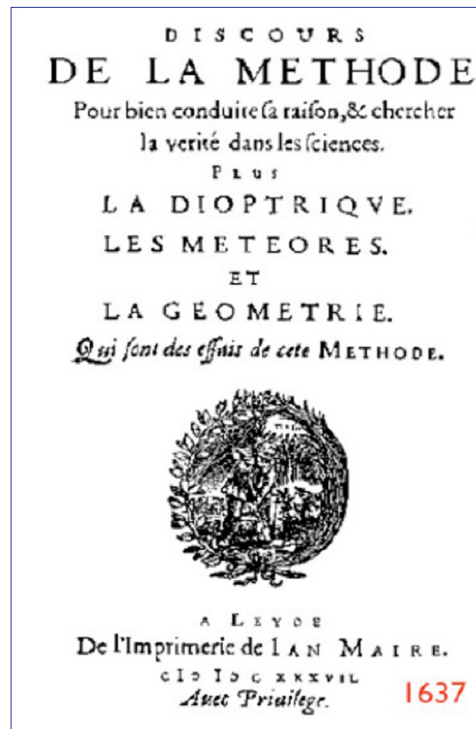


FIGURA 5. Portada del *Discours de la méthode* (1637) de Descartes.  
FONT: Descartes, 1637: portada.

Aquest treball de Descartes va suposar un punt de partida per considerar la geometria des d'una altra perspectiva. A més, conté la notació actual amb dues variants menors: escriu  $xx$ ,  $aa$ ... en lloc de  $x^2$ ,  $a^2$ ..., i no fa servir el signe d'igualtat utilitzat actualment. Malgrat que s'hagi acabat imposant aquesta notació, durant els cinquanta o seixanta anys posteriors les diferents obres d'àlgebra van adoptar notacions diverses.

Descartes començava el llibre I de *La géométrie* construint una àlgebra de segments: es mostrava com sumar, multiplicar, dividir i extreure l'arrel quadrada de segments fent construccions geomètriques. Tot seguit, es feien les construccions geomètriques de les solucions dels problemes plans i s'explicava com construir la solució d'una equació de segon grau.

En el tercer llibre de *La géométrie*, Descartes dedueix i dona una regla per saber quantes arrels positives i negatives (ell les anomena *vertaderes* i *falses*) pot tenir una equació. La regla dels signes en una equació de Descartes proporciona un meravellós exemple per entendre el tractament de les arrels negatives d'una equació. Descartes no únicament accepta les arrels negatives, sinó que a partir dels canvis de signe de l'equació dona una regla per saber el nombre d'arrels positives i negatives.

Descartes comença el llibre tercer plantejant la naturalesa de les equacions i de les seves arrels positives i negatives i explica (vegeu fig. 6, la traducció és nostra):

A vegades, però, esdevé que algunes de les arrels són falses, o més petites que no-res. Si suposem, per exemple, que  $x$  és el defecte d'una quantitat, com ara 5, tenim  $x + 5 = 0$ , que si és multiplicada per l'expressió

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0, \text{ dona } x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0,$$

una equació en la qual hi ha quatre arrels, a saber, tres vertaderes, que són 2, 3, 4 i una de falsa, que és 5.

Quelles  
font les  
fausses ra-  
cines.

Mais souuent il arriue, que quelques vnes de ces raci-  
nes sont fausses, ou moindres que rien. comme si on  
suppose que  $x$  designe aussy le defect d'une quantité,  
qui soit  $\gamma$ , on a  $x + \gamma \propto 0$ , qui estant multipliée par  
 $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$  fait  
 $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$   
pour vne equation en laquelle il y a quatre racines, a  
sçauoir trois vrayes qui sont 2, 3, 4, & vne fausse qui  
est  $\gamma$ .

FIGURA 6. Descartes enumera les solucions de l'equació tant negatives com positives.

FONT: Descartes, 1637: 372.

I continua reflexionant sobre les divisions de l'equació pels binomis per reduir els graus. I a la pàgina següent, després de preguntar-se quin és el nombre d'arrels vertaderes i falses d'una equació, explica que pot deduir el nombre d'arrels de cada tipus. Es pregunta al marge «Quantes arrels vertaderes pot tenir cada equació?» (vegeu fig. 7, la traducció és nostra). I respon:

També es coneix de tot això quantes arrels vertaderes i falses pot haver-hi en cada equació. N'hi poden haver tantes de vertaderes com canvis de signes + i -. I tantes de falses com tantes vegades trobem dos signes + o dos signes - junts. Així, a la darrera equació, com que després de  $x^4$  hi ha  $-4x^3$ , tenim un canvi de signe de + a -, i després de  $-19xx$  hi ha  $+106x$ , i després de  $+106x$  hi ha  $-120$ , que són encara dos altres canvis, se sap, doncs, que hi ha tres arrels vertaderes i una de falsa, ja que els dos signes -, de  $4x^3$  i  $19xx$ , són consecutius.

On connoist aussy de cecy combien il peut y auoir de  
vrayes racines, & combien de fausses en chaque Equacion. A sçauoir il y en peut auoir autant de vrayes, que  
les signes + & -- s'y trouuent de fois estre changés ; &  
autant de fausses qu'il s'y trouue de fois deux signes +,  
ou deux signes -- qui s'entrefuiuent. Comme en la der-  
niere, a cause qu'après  $+x^4$  il y a  $-4x^3$ , qui est vn chan-  
gement du signe + en --, & après  $-19xx$  il y a  $+106x$ ,  
& après  $+106x$  il y a  $-120$  qui sont encore deux autres  
changemens, on connoist qu'il y a trois vrayes racines, &  
vne fausse, a cause que les deux signes --, de  $4x^3$ , &  $19xx$ ,  
s'entrefuiuent.

Combien  
il peut y  
auoir de  
vrayes  
racines en  
chaque  
Equacion.

FIGURA 7. Regla per saber quantes arrels positives i negatives pot tenir una equació.

FONT: Descartes, 1637: 373.

En el recorregut històric exposat sobre l'acceptació dels nombres negatius en la matemàtica occidental, hi tenen un paper destacat els textos històrics relacionats amb el desenvolupament de la resolució d'equacions. S'inicia amb Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (segle VIII-IX), creador de les regles de l'àlgebra, que si bé classifica i resol equacions, no n'accepta les solucions negatives, i es clou al segle XVII amb Girard i Descartes, que amb més o menys contundència accepten que les equacions

poden tenir arrels positives i negatives, tot i que aquestes darreres encara les classifiquen com a falses solucions.

### **Algunes reflexions per a l'ensenyament dels nombres negatius**

Quan l'acceptació dels nombres negatius i les operacions relacionades amb aquests comporten debats acalorats entre grans matemàtics durant alguns segles, no ha de sorprendre que també plantegi preguntes i dificultats a les aules d'avui. Però justament el coneixement de la història de l'evolució d'aquesta acceptació suggereix contextos i seqüències didàctiques per introduir i treballar aquests continguts amb la finalitat d'aconseguir aprenentatges competencials en els alumnes.

L'experiència dels alumnes, a l'assignatura d'història del Màster de Formació de Professors de Matemàtiques, utilitzant aquest material sobre els negatius per preparar activitats per a l'aula, va ser molt positiva. Després de presentar i analitzar els textos històrics en ordre cronològic se'ls va demanar que preparassin alguna activitat per als alumnes de l'ESO. La línia del temps, especificant i justificant els canvis en el tractament dels negatius, es troba a quasi totes les activitats proposades. Alguns alumnes (futurs professors) van preparar activitats a diferents nivells, així la regla d'operacions dels signes per emprar a primer de l'ESO i, per exemple, la regla de Descartes dels canvis de signes en els coeficients d'una equació per trobar el nombre d'arrels positives i negatives de les equacions, dirigida a alumnes de 3r i 4t de l'ESO. També es troba una justificació geomètrica, amb quadrats i rectangles, del quadrat del binomi, que ens mostra que cal sumar finalment el quadrat 4, tot seguint l'enunciat retòric de l'obra de Pacioli.

En la introducció dels nous conceptes referits als nombres negatius s'hauria de distingir entre «un nombre amb un signe» i un nombre negatiu. En un primer estadi, el nombre negatiu es pot introduir en contextos reals i propers als alumnes, ja que en la vida quotidiana es troben amb temperatures negatives, dates que s'expressen amb nombres negatius i, a la vegada, també estan familiaritzats amb els nombres negatius que hi ha en alguns ascensors, tal com hem apuntat a la introducció.

Però el sentit dels nombres negatius i les operacions amb aquests requereixen un estadi superior. Així, tot i que es poden donar unes regles d'operacions amb nombres positius i negatius, com feia Fibonacci als segles XII-XIII, potser una comprensió profunda per part de tot l'alumnat arribarà un cop passada la barrera conceptual del raonament simbòlic i s'introdueixi a la resolució d'equacions algebraïques.

De fet, l'algebrització de les matemàtiques va provocar la necessitat de redefinir els límits de les ciències matemàtiques com a disciplina i de tenir en compte una nova pràctica matemàtica, la comprensió de la qual suposava, per exemple, l'extensió de la noció de raó als nombres negatius.

## Referències bibliogràfiques

- BENOIT, P.; MICHEAU, F. (1991). «¿El intermediario árabe?». A: SERRES, M. (ed.). *Historia de las ciencias*. Madrid: Cátedra, p. 175-201. [1a ed., 1989]
- CARDANO, G. (1545). *Artis magna, sive de regulis algebraicis*. Nuremberg: Johann Petreius.
- CHEMLA, K; SHUCHUN, G. (ed.) (2005). *Les neuf chapitres: Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris: Dunod.
- «Decret 119/2015, de 23 de juny, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària» (2015). *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, núm. 6900 (26 juny), p.136.
- «Decret 187/2015, de 25 d'agost, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria» (2015). *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*, núm. 6945 (28 agost), p. 305.
- DESCARTES, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode*. Leiden: Ian Maire.
- GIRARD, A. (1629). *Invention nouvelle en l'algèbre*. Amsterdam: Guillaume Iansson Blaeuw.
- GUEVARA, I. (2009). «Els nombres negatius i el zero: Xina, Grècia, Índia, món àrab, Europa (250-1567)». *ARC, Aplicació de Recursos al Currículum* [en línia]. <<http://apliense.xtec.cat/arc/node/421>> [Consulta: 10 maig 2021].
- GUEVARA, I.; PUIG-PLA, C. (2019). «Reversed procedure and Kuttaka method: The calculation of Indian mathematics (ganita) in Aryabhatiya and Brahma-sphutasiddhanta». A: BARBIN, E.; JANKVIST, U. T.; KJELDSEN, T. H.; SMESTAD, B.; TZANAKIS, C. (ed.). *Proceedings of the Eighth European Summer University on history and epistemology in mathematics education ESU 8*. Oslo: OsloMet-storbyuniversitetet, p. 449-462.
- HEEFFER, A. (2011). «Historical objections against the number line». *Science & Education*, 20 (9), p. 863-880.
- MANCOSU, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford: Oxford University Press.
- PACIOLI, L. (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*. Venècia: Paganino de Paganini.
- PISANO, L. (1202). *Liber abaci*.
- ROMERO, F.; MASSA-ESTEVE, M. R. (2019). «Sources from 16th century for the teaching and learning of mathematics». A: BARBIN, E.; JANKVIST, U. T.; KJELDSEN, T. H.; SMESTAD, B.; TZANAKIS, C. (ed.). *Proceedings of the Eighth European Summer University on history and epistemology in mathematics education ESU 8*. Oslo: OsloMet-storbyuniversitetet, p. 626-639.
- ROSEN, F. (ed. i trad.) (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. Londres: Oriental Translation Fund.
- SCHUBRING, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*. Nova York: Springer.
- STREEFLAND, L. (1996). «Negative numbers: Reflections of a learning researcher». *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, p. 57-77.
- THOMAIDIS, Y. (1993). «Aspects of negative numbers in the early 17th century». *Science & Education*, 2, p. 69-86.
- WITMER, R. T. (ed. i trad.) (1968). *Ars magna or the rules of algebra*. Cambridge, Mass.: The MIT Press. [Reeditat el 1993 per Dover Publications, Nova York]

## ELS ORÍGENS DE L'ENSENYAMENT TÈCNIC EN ESCOLES. UN NOU MODEL?

**ANTONI ROCA ROSELL**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA I INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS.

Paraules clau: *ensenyament tècnic, ensenyament pràctic, ensenyament en escoles, cursos matemàtics, segles XVIII i XIX*

### **The origin of technical training in schools. Towards a new model?**

Summary: *In the 17th and 18th centuries, technical education was formalized in regular schools. Some centres came to acquire a stable organization at the end of the 18th century and finally, in the 19th century, "regular" technical schools spread throughout the world, forming an immediate precedent for today's technical schools and faculties. Naturally, this process of transforming corporate or informal teaching into institutionalized teaching (from a technical workshop culture to a school culture) was a long one that was not free of trials and hesitations. In this paper, we offer some reflections based on a new analysis of sources referring to the origins of European technical schools, mainly in France. In this context, Catalan and Spanish experiences take on a new dimension.*

Key words: *vocational education, practical training, school training, mathematics courses, 18th and 19th centuries*

### **Introducció: les «fases» de l'ensenyament tècnic**

El meu projecte actual pretén aprofundir en els inicis de l'ensenyament tècnic, abans de la consolidació de les escoles.<sup>1</sup> Prenc la comparació entre França i Espanya com a terreny d'anàlisi, ja que França és sens dubte un referent en la formació de l'ensenyament tècnic reglat i Espanya, a més de ser la realitat més propera, proporciona elements prou interessants pel que fa al problema que ens interessa, açò és, com es produí la transició de l'ensenyament corporatiu a l'ensenyament reglat.

Recordem que diversos autors, com Melvin Kranzberg (1986), han parlat de dos tipus de cultura tècnica: la cultura de taller (*workshop culture*) i la cultura d'es-

---

1. Aquest treball s'inclou en els projectes HAR2016-75871-R i PRX18/00138.

cola (*school culture*). La diferenciació fa referència, doncs, a la formació en la pràctica o en una escola. La formació en la pràctica (al costat d'un tècnic que actua com a mestre) és la que ha funcionat des dels orígens de la tècnica (i segueix vigent en algunes branques o especialitats). Avui en dia, però, la formació dels tècnics en escoles reglades (amb una organització dels estudis definida, professorat, instal·lacions específiques) és la majoritària.<sup>2</sup>

Parlem de formació tècnica i hem de considerar com aquesta s'entenia fins al segle XIX. Un dels components d'aquesta formació era, sens dubte, l'adquisició de saber fer a través de la pràctica; al costat d'això, el cor de l'ensenyament teòric eren el dibuix i les matemàtiques. De fet, es consideraven matemàtiques «pures» (aritmètica, geometria, trigonometria, i a partir del segle XVII, àlgebra i logaritmes, i del XVIII, càlcul infinitesimal) i matemàtiques «mixtes» o «fisicomatemàtiques» (totes les disciplines que empraven les matemàtiques pures, perspectiva, arquitectura, artilleria, astronomia, geodèsia, estàtica i mecànica, òptica, etc.) (Massa-Esteve, Roca-Rosell i Puig-Pla, 2011).

En estudiar el procés d'establiment de centres d'ensenyament tècnic al segle XVIII, m'ha semblat útil incorporar dues fases a les dues considerades per Kranzberg i altres:

- a) Ensenyament corporatiu, de mestre a deixeble.
- b) Cursos privats (generalment, al costat d'una institució).
- c) Cursos inclosos en una institució, sense reconeixement «oficial».
- d) Ensenyament reglat en un centre (acadèmia, escola...).

Les fases *a* i *d* correspondrien a les que es tenen en compte generalment, i nosaltres hi afegiríem les dues intermèdies (Roca Rosell, 2019).

### Comparació França-Espanya, alguns elements

A Espanya, els tècnics es van formar privadament fins al segle XVIII, com ho indiquen les biografies d'enginyers i arquitectes i, al mateix temps, la inexistència (o inadequació) dels centres d'ensenyament. Podríem considerar com un intent d'establiment d'un ensenyament tècnic l'Acadèmia de Matemàtiques promoguda per l'arquitecte reial Juan de Herrera (1530-1597) a Madrid, però tingué un recorregut poc brillant (Esteban Piñero, 2002-2003; Vicente Maroto, 2002-2003). Les universitats no estaven interessades en les ciències o les tècniques, tampoc els col·legis com el de Nobles de Madrid.

A França, la major part dels tècnics es formaven per la via corporativa, però alguns centres militars (les acadèmies de Marina o Artilleria) tenien una petita estructura d'ensenyament des de final del segle XVII. L'admissió a aquests centres es feia per uns exàmens de matemàtiques (en el sentit ampli que hem comentat), per la qual cosa sorgiren ensenyaments privats per preparar-se per passar aquestes proves. S'ha de tenir present que l'ensenyament de les matemàtiques era molt limitat als col·legis i universitats (a França com a gairebé tots els països).

Són molt coneguts alguns professors particulars, com ara Jacques Ozanam (1640-1718), que pertanyia a una bona família vinguda a menys, que es dedicà a ensenyar matemàtiques a nobles i joves aspirants a entrar a la milícia (O'Connor i Robertson, 2002). En paral·lel a les classes, publicà manuals de matemàtiques que permetien un aprenentatge autodidàctic. També preparà llibres de problemes i recreacions (diversions) matemàtiques, alguns dels quals se segueixen reimprimint.

---

2. Sobre el desenvolupament de l'enginyeria al segle XIX, vegeu la síntesi de Grelon i Gouzévitch (2007).

Durant el segle XVIII hi hagué un bon nombre de professors particulars de matemàtiques que sovint publicaren els seus manuals (Leguay, 2010). Alguns d'aquests professors estaven vinculats a les universitats o als col·legis promoguts per diversos ordes religiosos (jesuïtes, oratorians, benedictins, mínims...), a més dels col·legis reials, però impartien cursos particulars per complementar els ensenyaments dels centres. S'ha de tenir present que la xarxa de centres d'ensenyament més o menys avançat era molt important a la França del segle XVIII, tant en nombre com en extensió territorial. De Dainville (1964) afirma que durant el segle XVIII, fins a la seva expulsió el 1762, hi havia una vuitantena de col·legis jesuïtes on s'ensenyava física, amb intensitat diversa. A més, les matemàtiques s'explicaven en aquests cursos de física (o filosofia natural), però només en un trimestre dels dos anys que duraven. Belhoste (1993) ens parla d'una vintena de col·legis, dos d'ells en centres oratorians, amb cursos complementaris de matemàtiques, sempre en càtedres no integrades en els cursos establerts. El 1776, molts d'aquests col·legis esdevingueren escoles reials militars, que integraren els ensenyaments més complets.

Segons l'esquema que presentem aquí, s'haurien realitzat les fases *b* i *c*, és a dir, hi havia cursos privats complementaris als ensenyaments establerts, cursos que aconseguiren diferents nivells de reconeixement institucional, alguns d'ells com a escoles reials. Aquestes escoles estaven en relació amb els centres d'ensenyament militar, als quals s'accedia mitjançant exàmens prou rigorosos de matemàtiques, però on l'ensenyament regular no era gens significatiu (Hahn, 1964*a* i 1964*b*). També s'iniciaren processos d'establiment d'escoles tècniques formals, tal com ho tractem més endavant. Aquest panorama fou trastocat per la Revolució a partir de 1789 (Taton, 1964).

A Espanya, hi havia alguns col·legis amb ensenyaments de matemàtiques, tot indica que en un nombre molt limitat, com posa de manifest Santiago Garma (2002), pel que fa a la Corona de Castella. En termes d'ensenyament reglat, es crearen diverses escoles militars (l'Acadèmia Militar de Matemàtiques de Barcelona, 1720; la d'Artilleria de Segòvia, el 1764, i també l'Acadèmia de Guàrdies Marines de Cadis, de 1715), que representen, com veurem, una aportació interessant.

En el cas del Col·legi de Nobles de Barcelona, el Col·legi de Cordelles, fundat per aquesta família a final del segle XVI, estava a càrrec de la Companyia de Jesús i els seus ensenyaments regulars incloïen geografia i cosmografia. A partir de 1756, a més, s'hi establiren uns ensenyaments «parallels» en la càtedra pública de matemàtiques promoguda per Tomàs Cerdà, professor d'aquest col·legi (Berenquer Clarià, 2015). La nova càtedra gaudia d'una subvenció reial, gestionada a través de l'Ajuntament de Barcelona, i estava oberta als artesans i els comerciants.

El Col·legi Imperial i el Seminari de Nobles de Madrid, on hi havia ensenyaments de matemàtiques d'un cert nivell, reformaren els ensenyaments després de l'expulsió dels jesuïtes (1767), a qui la Corona els havia confiat, sota la direcció de Jordi Juan (1713-1773) (Garma, 2002).

A França, es menciona sovint que la primera escola civil d'enginyeria fou la de Ponts et Chaussées (1747) (Picon, 1992).<sup>3</sup> Això, però, s'hauria de matisar. Fins a l'any 1775, Ponts et Chaussées era una oficina de dibuixants (Bureau des Dessinateurs) que depenia del Cos de Ponts et Chaussées, on es procuraven ensenyaments als seus membres de cara a la seva integració al cos sota la direcció del seu cap, Jean-Rodolphe Perronet (1708-1794); sovint es recorria a professors externs, principalment

3. L'escola és mencionada en gairebé totes les històries de l'enginyeria. A Europa, hi hagué algunes altres escoles civils anteriors, com la promoguda per Simon Stevin a la Universitat de Leiden a final del segle XVI.



d'arquitectura i matemàtiques.<sup>4</sup> Això vol dir que les primeres dècades d'existència de l'escola corresponen més a la fase *c* que no pas a la *d*.

L'escola constituïda el 1775 va «salvar-se» al moment de la Revolució, gràcies a la creació de l'École Polytechnique (1794), una escola republicana (Belhoste *et al.*, 1994).<sup>5</sup> Recordem que la Convenció Nacional (1792) suprimí tot el sistema acadèmic i d'ensenyament de l'Antic Règim, incloses les acadèmies i les universitats (Julia, 1981). La Politècnica forma part del procés de nova edificació del sistema d'ensenyament, que es desenvolupà durant un parell de decennis en què es refundaren les acadèmies i les facultats.

Tanmateix, molts autors creuen que la primera escola «moderna» d'enginyeria fou la d'enginyeria militar de Mézières (1748), traslladada posteriorment a Metz. Gaspard Monge (1746-1818) en fou alumne i professor, de manera que estengué la seva experiència per a la creació de la Politècnica (Berenguer Clarià, 2017).

Les escoles o acadèmies militars d'artilleria o de la marina ja existien des de finals del segle XVII, però amb una estructura molt limitada. Sembla que els cursos eren relativament breus i, a més, en el cas de les acadèmies de guàrdies marines, es tractava de companyies de combat, cosa que limitava la tasca d'ensenyament (Hahn, 1964 *a i b*).

El paper de l'exèrcit en la formació dels tècnics és, encara, una qüestió en estudi. Tot i el paper relativament secundari en el context francès, a Portugal, per exemple, l'ensenyament militar té una trajectòria notable.<sup>6</sup> Recentment, ha aparegut un conjunt molt rellevant de treballs centrats en l'anàlisi comparativa internacional de l'ensenyament tècnic militar pel que fa a les matemàtiques (Blanco i Bruneau, 2020).

Tanmateix, les escoles d'enginyeria com l'escola de Mézières o la de Ponts i Camins no eren a França durant el segle XVIII una via *completament establerta*. També hi hagué altres experiències, com per exemple l'École des Arts, creada a Reims el 1747, amb una escola de dibuix i una de matemàtiques. Promoguda per l'alcalde de la ciutat (*lieutenant des habitants*) Louis Levesque de Pouilly (1691-1750), tingué el suport de l'Acadèmia de Ciències de París, una entitat molt més compromesa amb la tècnica del que se sol dir (Delaunay, 2018). Una altra opció fou la del Conservatoire national des arts et métiers de París, una altra creació revolucionària de 1794. El Conservatori ofería informació sobre la tècnica i la indústria en un antecedent d'un museu didàctic i de difusió. A partir de 1829, es començà a organitzar ensenyaments especialitzats, però sense l'objectiu de crear una escola.<sup>7</sup> De tota manera, ja al segle XX, aquests ensenyaments s'establiren en una nova escola d'enginyeria (coneguda com CNAM).

Pel que fa a l'àmbit espanyol, hem de mencionar la rellevància dels centres militars.<sup>8</sup> Com hem dit, des de 1715 es crearen acadèmies militars en diferents branques de l'Exèrcit. El 1715, es formà l'Acadèmia de Guardamarines de Cadis, inicialment, com el seu antecedent a França, una companyia

4. Per exemple, acudiren a l'escola d'arquitectura privada que intentava consolidar l'arquitecte, extern al Cos de Ponts i Camins, Jacques-François Blondel (1705-1774).

5. La Politècnica obria com a via única d'accés a l'enginyeria. Les antigues escoles es reobriren uns anys després com a escoles «d'aplicació».

6. Vegeu Conde i Massa-Esteve (2018).

7. Un estudi prosopogràfic dels professors del Conservatori es pot trobar a Fontanon i Grelon (1994).

8. Navarro Loidi (2006) estudia els ensenyaments militars al segle XVII. Garma (2002) fa veure la rellevància dels centres militars per a l'ensenyament de les matemàtiques a la Corona de Castella al segle XVIII.

combatent i, per tant, amb limitacions importants pel que fa a l'ambició dels ensenyaments. El 1720 es creà a Barcelona la Reial Acadèmia Militar de Matemàtiques, per iniciativa de l'enginyer en cap del Cos d'Enginyers Militars, Jordi Pròsper de Verboom (Capel *et al.*, 1988). Aquesta entitat pretenia formar en matemàtiques els oficials de l'exèrcit (incloent-hi enginyers, artillers i, fins i tot, al començament, oficials de marina). L'acadèmia no tenia per objectiu la formació d'enginyers, tot i que el seu professorat eren enginyers militars. Quan es tancà el 1803, s'obrí a Alcalá de Henares una acadèmia d'enginyers militars, cosa que ha fet pensar que l'Acadèmia de Barcelona ja havia estat una acadèmia d'enginyeria.

L'Acadèmia de Matemàtiques de Barcelona tenia una estructura clara d'escola, basada en un curs matemàtic que preparà el seu segon director, Pedro de Lucuce, i que es cursava en dos o tres anys (Massa-Esteve, Roca-Rosell i Puig-Pla, 2011). Això la fa realment una experiència pionera a Europa, que contribuí, sens dubte, a promoure l'enginyeria d'escola a Barcelona.

A Espanya, la primera escola civil d'enginyeria fou la de Camins i Canals (1802) promoguda per Agustín de Betancourt (1758-1824) (Gouzévitch, 2018). L'escola, però, fou tancada el 1808 arran de la Guerra del Francès. No aconseguí obrir definitivament fins al 1834. Es tractava d'una escola lligada al Cos de Camins espanyol (Sánchez Miñana, 2019) i era, inicialment, un centre molt restringit.

Pel que fa a l'arquitectura, la Real Academia de Bellas Artes de San Fernando de Madrid n'atorgava els títols i n'organitzà els primers ensenyaments. A partir de 1761, Benet Bails (1730-1797) va ser contractat com a director de matemàtiques. És significatiu que, animat per l'Acadèmia, publicqués diversos manuals pensats no únicament per a unes classes, sinó per a la preparació (privada) dels exàmens a través dels quals s'aconseguia el títol d'arquitecte.

Pel que fa als ensenyaments privats, podem mencionar el grup de *novators* valencians, del qual sorgí una obra com el *Compendio mathematico* de Tomàs Vicent Tosca (1651-1723), nou volums apareguts entre 1707 i 1715, amb dues reedicions durant el segle XVIII (Navarro Brotons, 1985). Les activitats del grup de *novators* valencians eren complementàries als ensenyaments de la universitat, on, com era la norma, les matemàtiques hi tenien un lloc restringit.

Tenim un exemple peculiar de curs privat, el de l'artista Pasqual Calbó (1752-1817). Se'n conserva un manuscrit, d'un miler de fulls escrits en català menorquí, que ens testimonia que a Menorca, al voltant de 1800, els joves podien aconseguir una bona formació matemàtica, que incloïa l'arquitectura i la construcció de vaixells (Roca Rosell, 2016 i 2017). Aquest manuscrit està en procés d'edició per l'Institut Menorquí d'Estudis.<sup>9</sup>

Hem vist que a Barcelona s'organitzà una escola, la Càtedra Pública de Matemàtiques, on Cerdà tenia previst explicar un curs complet pensant en el món de la construcció, la tècnica en general i, probablement, les activitats militars. Pel seu caràcter municipal i per la seva relació amb la Reial Acadèmia de Ciències i Arts, pensem que podria tenir alguns paral·lelismes amb la de Reims. A més, també a Barcelona, la Junta de Comerç creà una sèrie d'ensenyaments artístics i tècnics a partir de 1770 (Barca-Salom *et al.*, 2009). Com és sabut, aquests ensenyaments proveïen coneixements científics i tècnics sense atorgar cap diploma (però com un «liceo artístico», digué Francesc Carbonell el 1805). Aquests ensenyaments de la Junta serien un bon exemple de la fase c, és a dir, ensenyaments

---

9. N'ha aparegut el primer volum. Roca Rosell *et al.* (2020).

dins d'una institució, però sense estructura d'escola reglada. El 1851, tanmateix, es dissolgueren i donaren lloc a l'Escola Industrial Barcelonesa, una escola que graduà enginyers industrials.<sup>10</sup>

### **Per acabar**

A França, a més dels ordes religiosos, l'Estat tingué un paper molt actiu, principalment a través de l'Acadèmia de Ciències de París (complementada per una xarxa d'acadèmies provincials molt actives). Hom veu una aristocràcia, una burgesia i cossos artesanals amb un gran compromís amb la ciència, sobretot amb la tècnica, en el marc de la concepció il·lustrada d'utilitat. La insuficiència de l'ensenyament de les matemàtiques als col·legis i universitats es compensà en cursos privats, a poc a poc aollits per les institucions, i en la publicació de manuals que permetien l'aprenentatge autodidàctic. Els diversos assaigs foren útils per configurar un ensenyament tècnic reglat tant en el marc de l'enginyeria militar com dels cossos tècnics de l'Estat.

Els casos de Barcelona i Catalunya mostren la força de les noves classes productives, amb un paper més modest, en general, de l'Estat. A Espanya, els cursos privats i els manuals també ajudaren a proporcionar una formació matemàtica als tècnics, en el període anterior a la creació de les escoles tècniques.

Hem plantejat el model de les quatre fases per ajudar en l'anàlisi de les temptatives diferents per organitzar l'ensenyament tècnic, principalment al segle XVIII i als inicis del XIX, que esperem poder aprofundir en futures publicacions.

---

10. Sobre l'escola de Barcelona, vegeu Lusa i Roca Rosell (1999).

## Referències bibliogràfiques

- BARCA-SALOM, F. X.; BERNAT, P.; PONT I ESTRADERA, M.; PUIG-PLA, C. (coord.) (2009). *Fàbrica, taller, laboratori: La Junta de Comerç de Barcelona: Ciència i tècnica per a la indústria i el comerç (1769-1851)*. Barcelona: Cambra de Comerç.
- BELHOSTE, B. (1993). «L'enseignement des mathématiques dans les collèges oratoriens au XVIII<sup>e</sup> siècle». A: EHRARD, J. (dir.). *Le Collège de Riom et l'enseignement oratorien en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*. París: CNRS; Oxford: Voltaire Foundation, p. 141-160.
- BELHOSTE, B.; DAHAN DALMEDICO, A.; PICON, A. (dir.) (1994). *La formation polytechnicienne 1794-1994*. París: Dunod.
- BERENQUER CLARIÀ, J. (2015). *Tomàs Cerdà (1757-1759): Tratado de fluxiones*. Barcelona: Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona.
- (2017). *Monge: el padre de la geometría descriptiva*. Barcelona: RBA.
- BLANCO, M.; BRUNEAU, O. (ed.) (2020). *Mathematics in military academies (18th and 19th centuries)*. *Philosophia Scientiæ*, 24-1. [Número monogràfic]
- CAPEL, H.; SÁNCHEZ, J. E.; MONCADA, O. (1988). *De Palas a Minerva: La formación científica y la estructura institucional de los ingenieros militares en el siglo XVIII*. Barcelona: El Serbal: CSIC.
- CONDE, A. F.; MASSA-ESTEVE, M. R. (2018). «Teaching engineers in the seventeenth century: European influences in Portugal». *Engineering Studies*, 10 (2-3), p. 115-132.
- DAINVILLE, F. de (1964). «L'enseignement scientifique dans les collèges des jésuites». A: TATON, R. (ed.). *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*. París: Hermann, p. 27-65.
- DELAUNAY, B. (2018). *Penser la technique à l'Académie Royale des Sciences (1699-1750)*. París: Honoré Champion.
- ESTEBAN PIÑERO, M. (2002-2003). «Las academias técnicas en la España del siglo XVI». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 5, p. 10-18.
- FONTANON, C.; GRELON, A. (dir.) (1994). *Les professeurs du Conservatoire national des arts et métiers: Dictionnaire biographique 1794-1955*. París: INRP: CNAM. 2 v.
- GARMA PONS, S. (2002). «La enseñanza de las matemáticas». A: PESET REIG, J. L. (dir.). *Historia de la ciencia y de la técnica en la Corona de Castilla*. Vol. IV: *El siglo XVIII*. Valladolid: Junta de Castilla y León. Consejería de Educación y Cultura, p. 311-346.
- GOUZÉVITCH, I. (2018). *Planète «Bétancourt»*. París: Université Paris Diderot. [Monografia HDR]
- GRELON, A.; GOUZÉVITCH, I. (2007). «Reflexión sobre el ingeniero europeo en el siglo XIX: retos, problemáticas e historiografías». A: SILVA SUÁREZ, M. (ed.). *Técnica e ingeniería en España*. Vol. V: *El Ochocientos: Profesiones e instituciones civiles*. Saragossa: Real Academia de Ingeniería: Institución «Fernando el Católico»: Pressas Universitarias de Zaragoza, p. 269-321.
- HAHN, R. (1964a). «L'enseignement scientifique aux écoles militaires et d'artillerie». A: TATON, R. (ed.). *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*. París: Hermann, p. 513-545.
- (1964b). «L'enseignement scientifique des gardes de la marine au XVIII<sup>e</sup> siècle». A: TATON, R. (ed.). *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*. París: Hermann, p. 547-558.
- JULIA, D. (1981). *Les trois couleurs du tableau noir: la Révolution*. París: Belin.
- KRANZBERG, M. (ed.) (1986). *Technological education-technological style*. San Francisco: San Francisco Press.
- LEGUAY, O. (2010). *L'enseignement des mathématiques au XVIII<sup>e</sup> siècle en France à travers l'étude de quelques préfaces de livres de cours* [en línia]. <<http://www.inclassablesmathematiques.fr/archive/2011/11/17/l-enseignement-des-mathematiques-au-xviiieme-siecle-en-franc.html>> [Consulta: 5 maig 2021].
- LUSA, G.; ROCA ROSELL, A. (1999). «Doscientos años de técnica en Barcelona. La técnica científica académica». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 3, p. 101-130.
- MASSA-ESTEVE, M. R.; ROCA-ROSELL, A.; PUIG-PLA, C. (2011). «Mixed' mathematics in engineering education in Spain: Pedro Lucuce's course at the Barcelona Royal Military Academy of Mathematics in the eighteenth century». *Engineering Studies*, vol. 3, núm. 3 (desembre), p. 233-253.

NAVARRO BROTONS, V. (1985). *Tradicó i canvi científic al País Valencià modern: 1660-1720: Les ciències físico-matemàtiques*. València: Eliseu Climent.

NAVARRO LOIDI, J. (2006). *Las ciencias matemáticas y las enseñanzas militares durante el reinado de Carlos II*. Madrid: Ministerio de Defensa. Secretaría General Técnica.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2002). «Jacques Ozanam». A: *MacTutor history of mathematics archive* [en línia]. University of St Andrews. <<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ozanam.html>> [Consulta: 5 maig 2021].

PICON, A. (1992). *L'invention de l'ingénieur moderne: L'École des Ponts et Chaussées: 1747-1851*. París: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

ROCA ROSELL, A. (2016). *Un curs matemàtic a la Menorca de la Il·lustració, en la commemoració de Pasqual Calbó i Caldés (1752-1817)*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

— (2017). «Una obra 'matemàtica' singular. Pasqual Calbó, un artista-científic». A: ANDREU ADAME, C.; DESEL GONZÁLEZ, C. (coord.). *Pasqual Calbó i Caldés 1752-1817*. Maó: Museu de Menorca, p. 48-59.

ROCA ROSELL, A. (2019). «Ingénierie et société en Espagne, XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles: influences et relations avec la France, modèles et transferts. Quatre stades, plusieurs rythmes. Projet 2018-2019». *Études et Documents* [en línia], 18, p. 3-20. <<https://www.cmh.ens.fr/Ingenierie-et-societe-en-Espagne>> [Consulta: 5 maig 2021].

ROCA ROSELL, A.; SALORD, J.; TORRES, J. L. (ed.) (2020). *Pasqual Calbó i Caldés: Obra científica*. Vol. 1: *Tractats de matemàtiques pures*. Maó: Institut Menorquí d'Estudis; Consell Insular de Menorca. Departament de Cultura, Educació i Esports; Barcelona: Institut d'Estudis Catalans; Palma: Universitat de les Illes Balears; Institut d'Estudis Balearics; Institut d'Indústries Culturals de les Illes Balears.

SÁNCHEZ MIÑANA, J. (2019). «Los primeros facultativos de la Inspección de Caminos y Canales (1799)». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 17, p. 67-111.

TATON, R. (dir.) (1964). *Enseignement et diffusion des sciences en France au XVIII<sup>e</sup> siècle*. París: Hermann. [Reimpresió de 1986]

VICENTE MAROTO, I. (2002-2003). «Las escuelas de artillería en los siglos XVI y XVII». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 5, p. 1-9.

## LES INSTITUTIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CHAPELLE

**JOAQUIM BERENGUER**

CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *La Chapelle, segle XVIII, ensenyament, matemàtiques*

### **La Chapelle's Institutions géométriques**

Summary: *This paper seeks to provide some tools that can facilitate the introduction of geometry among young students. Specifically, we show that the French mathematician Jean-Baptiste de La Chapelle (c. 1710-1792), in his Institutions géométriques (1746), defended that the teaching of mathematics should start at the age of six. We analyse La Chapelle's didactic orientations with some examples from his book and, on the basis of this analysis, we reflect on the usefulness of his pedagogical methodology for the teaching of mathematics today.*

Key words: *La Chapelle, 18th century, teaching, mathematics*

### **Introducció<sup>1</sup>**

Giuliano Testa en el seu article «L'enseignement des coniques à travers une approche historique: comment saisir un texte?» (2000) escriu que poques coses es coneixen de la vida de Jean-Baptiste de La Chapelle. Se sap que va néixer a Rouen als voltants de 1710 i que va morir a París el 1792. Va ser abat, matemàtic, ensenyant i va participar en les parts matemàtiques de l'*Encyclopédie*. El 1747 va ser admès a la Royal Society de Londres i, a partir de 1751, va ser censor reial. Entre altres textos, va escriure *Institutions géométriques* (1746), *Traité des sections coniques* (1750), *L'art de communiquer ses idées* (1763), *Le ventriloque, ou l'engastrimythe* (Londres i París, 1772) i *Traité de la construction théorique et pratique du scaphandre ou du bateau de l'homme* (París, 1775) (vegeu fig. 1).

---

1. Aquest treball s'inclou en el projecte HAR2016-75871-R del Ministeri d'Economia i Competitivitat espanyol.



FIGURA 1. *Traité de la construction théorique et pratique du scaphandre ou du bateau de l'homme, approuvé par l'Académie des Sciences.*

FONT: La Chapelle, 1775: pl. iv.

Testa, en el mateix article, posant en relleu el caràcter més pedagògic de La Chapelle, el compara amb Rousseau:

Entre els seus principis ben coneguts, Rousseau ens ofereix algunes idees estimulants sobre l'educació matemàtica precoç dels nens, totalment semblants a les de M. de La Chapelle. (Testa, 2000: 110)<sup>2</sup>

Pensem que, efectivament, l'obra de La Chapelle és un exemple de com en el segle XVIII alguns membres de la comunitat científica es preocupen per l'educació dels joves. Concretament el llibre *Institutions géométriques* (1746) de La Chapelle està dedicat a l'ensenyament de les matemàtiques i es defensa que aquest ensenyament cal iniciar-lo des de l'edat de sis anys.

Amb aquest treball que hem presentat a la XVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament, volem subratllar, doncs, com La Chapelle manifesta el seu interès per l'ensenyament de les matemàtiques als infants. L'anàlisi del text de La Chapelle ens ha permès descobrir quines són les orientacions didàctiques que l'autor està donant per a l'ensenyament de les matemàtiques i comparar-les amb les que actualment són vigents, alhora que ens interroguem si les reflexions de La Chapelle podrien ser útils per a l'ensenyament actual de les matemàtiques.

### **El contingut de les *Institutions géométriques***

Es tracta d'una obra que consta de dos volums. En el primer es pot trobar una part introductòria en què La Chapelle raona com els nens des dels sis anys poden i han d'aprendre matemàtiques, particularment geometria. A continuació hi trobem dos capítols dedicats a l'aritmètica. Aquesta primera part

2. La traducció del francès al català d'aquesta citació i de totes les que apareixen a continuació són de l'autor d'aquest article.

acaba amb un capítol dedicat a l'àlgebra, en què es tracta dels polinomis i de les operacions amb aquests, de les fraccions algebraïques, arrels quadrades i cúbiques, resolució d'equacions de primer i de segon grau i algunes de grau superior.

Tot seguit comença el primer llibre dedicat a la geometria i estructurat a partir de quatre capítols: el primer capítol és introductori sobre els principis i el mètode; el segon tracta sobre la línia recta; el tercer tracta sobre el cercle combinat amb la recta; el quart tracta sobre la combinació de tres línies rectes, el triangle i altres polígons.

El segon volum conté el llibre segon i el tercer de geometria. El segon llibre consta de dos capítols: el primer capítol dedicat als principis de la mesura de terrenys i el segon capítol dedicat a la mesura de superfícies. El tercer llibre porta per títol *Geometria de l'adolescència* i consta de quatre capítols: el primer capítol tracta de les raons i proporcions, així com també dels logaritmes i de les progressions; en el segon capítol es veu la semblança de triangles i d'altres figures en què s'aplica l'àlgebra; el tercer capítol està dedicat a la mesura dels sòlids; el quart capítol porta com a títol «De la solidesa dels cossos segons el mètode dels antics, anomenat *mètode d'exhaustió*», en el qual també es veu trigonometria.

Per poder respondre a les qüestions que ens hem plantejat en relació amb el text de La Chapelle, en aquest treball, ens hem centrat en el seu primer volum. D'aquest volum hem volgut analitzar la introducció, en la qual l'autor explica quines són les seves orientacions pedagògiques. I per poder veure com aquestes orientacions es plasmen a la pràctica, hem explicat amb més detall un problema de la part d'àlgebra i dos de la de geometria.

### Discurs sobre l'estudi de les matemàtiques

La Chapelle comença el seu llibre dedicant-lo als alumnes: «Als senyors alumnes del Col·legi Louis Le Grand».<sup>3</sup> En aquesta dedicatòria La Chapelle explica que l'objectiu del llibre és aplanar les dificultats en l'estudi de les matemàtiques entre els nens. L'autor creu que aquestes dificultats provenen molt menys de la matèria tractada que de la poca confiança que es té en la capacitat dels nens. Força gent pensa, diu l'autor, que les matemàtiques no han d'entrar en l'educació dels joves abans dels quinze anys i, en canvi, ell creu que «des de l'edat dels sis anys els nens ja tenen dos ulls per veure les línies i dues mans per dibuixar-les». Per altra part està convençut que els infants no tenen cap problema per comptar, havent vist moltes vegades com aquests mesuren diferents longituds amb cordills.

Després d'aquesta dedicatòria, la introducció, que porta per títol «Discurs sobre l'estudi de les matemàtiques»,<sup>4</sup> gira al voltant de quatre idees.

a) La primera idea i que vertebra tot el pensament de La Chapelle és que la geometria es basa en la naturalesa i que no és una doctrina de fe:

[...] deixo els discursos rebuscats d'aquests metafísics primmirats, que volen absolutament que la geometria tingui els seus articles de fe com la teologia. No deixen de retreure-li que les seves su-

3. Durant bona part del segle XVII el Col·legi Louis Le Grand de París va ser un col·legi dels jesuïtes amb nombrosos alumnes. El 1763, amb l'expulsió dels jesuïtes, va passar a formar part de la Universitat de París.

4. «Discours sur l'étude des mathématiques, où l'on essaie d'établir que les enfants sont capables de s'y appliquer», La Chapelle (1746a).



perfícies, les seves línies, els seus punts no existeixen en la matèria. No veig, en canvi, res que aparegui més contínuament en l'experiència. Els geòmetres no tenen pas línies, superfícies, punts diferents dels que la matèria els ofereix; mesuren allò que veuen, allò que toquen, allò que recorren. (La Chapelle, 1746: 7)

b) Els nens des de ben petits són capaços de copsar conceptes matemàtics, particularment els geomètrics. L'autor posa com a exemple la capacitat d'un nen per calcular l'amplada d'un camí on la noció de perpendicular apareix de forma natural sense conèixer-ne el nom:

Els nens calculen l'amplada d'un camí? La perpendicular és la línia que busquen (no en saben el nom, però el nom no té res a veure amb les idees). No volen que sigui torta; tenen molta cura que aquell que és a l'altre extrem de la corda estigui ben bé de cara amb el primer; fan geometria sense saber-ho. (La Chapelle, 1746: 11)

c) Per a La Chapelle, l'important és utilitzar un bon mètode, captant l'atenció dels nens, a partir de les figures i del moviment, i, per tant, considera que cal preparar una geometria especialment per als nens. Intenta fer-los sentir la necessitat i la curiositat per saber executar certes operacions; quan estan ben preparats, els parla de la proposició o del problema que mostra la manera de resoldre un determinat tema.

Quan s'ha tractat de convèncer els nens d'una veritat, se'ls ha ofert exercicis pràctics divertits, i si s'ha pogut substituir una «veritat sensible» (és a dir, intuïtiva) per una demostració, s'ha optat per aquesta via més «lluminosa», sense obviar les demostracions rigoroses (La Chapelle, 1746: 53-54).

d) Les veritats matemàtiques són molt més útils quan són ensenyades des dels primers anys de l'educació. Entre altres raons diu que els joves adolescents de quinze anys tendeixen a buscar la utilitat dels coneixements, mentre que els nens no tenen aquesta necessitat. Aquests darrers veuen que no tenen res a perdre aprenent una ciència suposadament «inútil». En canvi, als quinze o vint anys «l'esperit» ja està format i s'arriba massa tard per canviar-lo (La Chapelle, 1746: 17-20).

### De la resolució dels problemes

Després de la part dedicada a l'aritmètica i al final del capítol de l'àlgebra hi ha una part dedicada a la resolució de problemes en què es pot analitzar de quina manera La Chapelle tracta problemes d'àlgebra elementals enfocats a l'ensenyament dels alumnes més petits. L'enunciat del primer d'aquests problemes és el següent:

Un corredor sap que va quatre vegades més ràpid que un altre; pensa que arribarà abans que l'altre a un lloc allunyat 15 llegües des d'on es proposa el repte; l'altre accepta la proposició amb la condició que li doni 11 llegües d'avantatge; es demana quin dels dos guanyarà. (La Chapelle, 1746: 245)

Per a la resolució d'aquest problema, l'autor estableix d'entrada que el problema quedarà resolt si es determina la distància on el primer corredor trobarà el seu adversari. Si és més enllà de la meta, haurà perdut, però si és abans haurà guanyat.

Anomena  $x$  l'espai recorregut del que té 11 llegües d'avantatge. De manera que en el moment de ser atrapat tindrà  $11 + x$ . I com que se suposa que el primer corredor va quatre vegades més de pres-

sa que el seu adversari, quan es trobaran, el primer corredor haurà fet quatre vegades més de camí, és a dir  $4x$ . En el moment de trobar-se tindrem la igualtat  $11 + x = 4x$ . La Chapelle, en aquest punt, diu que la qüestió queda reduïda a una equació en què cal aïllar la incògnita  $x$ .

Aplicant les regles per resoldre equacions, que prèviament l'autor ja ha explicat, obté successivament:  $11 = 3x$ ;  $\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$ ;  $x = \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$ . I conclou que el corredor que té 11 llegües d'avantatge haurà fet 3 llegües i  $\frac{2}{3}$  de llegua quan serà atrapat per l'altre corredor. Si afegim a aquest espai les 11 llegües d'avantatge, això dona 14 llegües i  $\frac{2}{3}$  de llegua. Així doncs, el primer corredor ha guanyat, ja que atrapa el seu adversari  $\frac{1}{3}$  de llegua abans de la meta, que hem suposat a 15 llegües de distància.

La Chapelle acompanya la resolució d'aquest problema amb una reflexió sobre el mètode que cal utilitzar. Escriu que l'essencial de la resolució d'un problema consisteix a construir l'equació que l'expressa i que, un cop construïda l'equació, només cal aïllar les incògnites. Si l'aïllament és possible, el problema queda resolt; i si no és possible, l'equació també ho mostrarà, la qual cosa també és una veritable resolució, ja que només es pot resoldre un problema de dues maneres, o determinant el que es demana, o mostrant que s'ha proposat una cosa absurda.

Finalment, l'autor explica que no hi ha cap regla per trobar l'equació en un problema. Diu que trobar aquesta equació depèn de l'habilitat del que busca la resolució. En qualsevol cas, cal considerar bé les condicions, és a dir, les dades del problema, i és a partir d'aquestes dades que s'ha de fer la resolució. No es pot entrar dins una equació d'un problema ni més ni menys que allò que forma part del problema. La Chapelle acaba aquestes reflexions dient que es demostra la validesa dels valors de les incògnites comprovant que satisfan la qüestió plantejada (La Chapelle, 1746: 247-248).

### Portar la geometria al terreny

Al principi del llibre de geometria del primer volum, La Chapelle fa algunes consideracions generals. Considera que, amb els nens, la pràctica ha de ser companya inseparable de la teoria. De fet, tots els exercicis recollits en el seu text tenen dues parts, una és la realització sobre paper i l'altra sobre el terreny. Després generalitza aquesta afirmació dient que, en realitat, la teoria de les ciències no seria altra cosa que una pràctica reflexionada. Al final, afirma que, amb els nens, tot i que el sublim de la teoria consisteix a avançar-se a l'experiència, guiar-la i perfeccionar-la, un cop demostrada una propietat, aquesta s'ha de confirmar amb l'experiència; per exemple, tot i haver demostrat la igualtat dels angles alterns interns, quan aquests angles apareguin, els alumnes hauran de mesurar-los amb el compàs, a fi que vegin que efectivament són iguals.

### Determinar l'angle sota el qual un ull situat en un punt donat veuria un objecte proposat

Un aspecte, en l'aprenentatge dels joves estudiants, del qual l'autor vol subratllar la importància és poder utilitzar els instruments de mesura en la geometria. Així, en l'exercici vi del tercer capítol ens descriu el grafòmetre, com a instrument en operacions topogràfiques, per tal de determinar l'angle d'elevació d'un objecte (vegeu fig. 2). I, en una nota a peu de pàgina, escriu:

L'instrument davant la vista; anirem al jardí; o inclús sense sortir de l'apartament, mostrarem com es calcula l'angle sota el qual dos objectes semblen distants l'un de l'altre. (La Chapelle, 1746: 279)

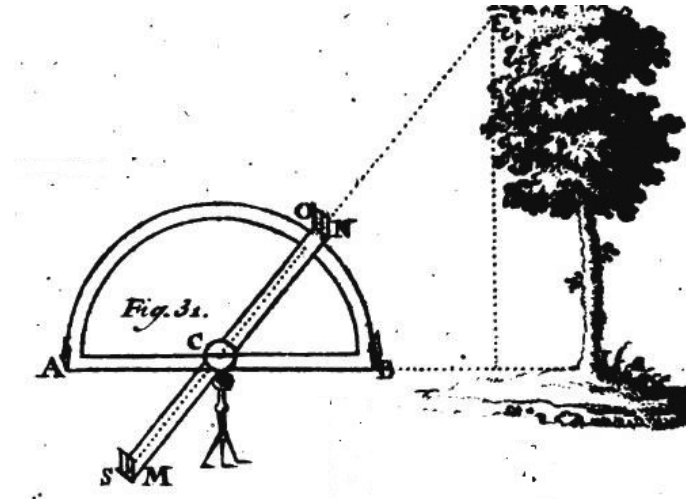


FIGURA 2. «Déterminer l'angle sous lequel un oeuil placé en un point donné verrait un objet proposé.»

FONT: La Chapelle, 1746: 279, fig. 31.

### Determinar la longitud d'una línia recta que és accessible solament pels seus extrems

Tant el tercer capítol com el quart del primer llibre de geometria contenen una llarga llista de diversos exercicis, a partir dels quals l'autor dedueix diferents teoremes de geometria. El darrer problema del tercer capítol ens proposa determinar la longitud d'una distància la qual només és accessible a partir dels seus extrems (vegeu fig. 3). En primer lloc ens explica com fer-ho, a continuació n'exposa la demostració i finalment dona alguna definició i/o corollari a partir del problema explicat.

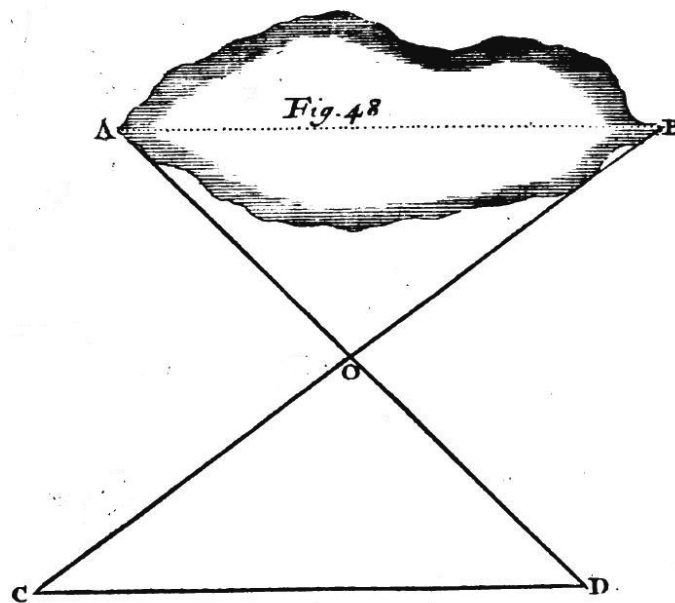


FIGURA 3. «Déterminer la longueur d'une ligne droite qui n'est accessible que par ses extrémités.»

FONT: La Chapelle, 1746: 300, fig. 48.

Escolliu un punt  $O$  des d'on pugueu anar als extrems  $A$ ,  $B$  caminant sobre les línies  $OA$ ,  $OB$  que mesurareu; prolongueu  $AO$  fins un punt  $D$  de manera que  $OD = AO$ . Feu també la prolongació  $OC = BO$ , i calculeu a continuació la distància entre  $C$  i  $D$ . La longitud  $AB$  serà igual a  $CD$ .

L'angle  $AOB = \text{angle } COD$ , que és l'oposat al vèrtex, i per construcció  $AO = OD$  i  $BO = OC$ ; l'angle  $COD$  no té res de diferent de l'angle  $AOB$ ,<sup>5</sup> per tant, la distància  $CD$  és igual a la distància  $AB$ .

S'anomena *base d'un angle* el costat oposat a aquest angle: així, el costat  $CD$  és la base de l'angle  $COD$ .

Deduïm, doncs, de la demostració del problema precedent que dos angles iguals, amb els costats iguals respectivament, tenen necessàriament bases iguals. (La Chapelle, 1746: 300)

## Conclusions

Podríem resumir en cinc punts algunes de les conclusions que hem extret de l'anàlisi del llibre de La Chapelle:

— La reflexió de La Chapelle és un exponent de la preocupació, en la comunitat científica del moment, per l'ensenyament de les matemàtiques entre els més joves.

— La seva defensa d'un ensenyament de les matemàtiques des de l'edat de sis anys no és usual en aquell moment i la seva opinió no està exempta de polèmica, com es pot comprovar en el mateix text de l'autor.

— Les línies bàsiques de l'enfocament didàctic de La Chapelle giren entorn de la intuïció, com a guia del descobriment, la pràctica, com a consolidació de l'adquisició d'aquest coneixement, el contacte amb la natura i la manipulació dels instruments de mesura, com a eines imprescindibles en l'aprenentatge dels alumnes. Hi ha quelcom de posició vital en el convenciment, per part de l'autor, de la capacitat dels alumnes per aprendre les matemàtiques.

— Aquestes orientacions tenen força elements en comú amb els mètodes utilitzats en l'actualitat: la necessitat que els mateixos alumnes comprovin, a partir dels exercicis, la teoria que han après. L'èmfasi amb els instruments avui dia es traduiria en la necessitat d'utilitzar els mitjans tecnològics moderns.

— Algunes de les reflexions i exercicis que apareixen en aquest text poden ser útils per a l'actual ensenyant de matemàtiques, i el text de La Chapelle podria ser útil també com a text a comentar a classe. Un exemple d'aquesta possibilitat seria la resolució del problema amb l'equació de primer grau i l'explicació retòrica de la resolució d'un problema, exposats en aquest article.

---

5. Aquí s'està referint, sense anomenar-los, als triangles  $AOB$  i  $COD$ .

## Referències bibliogràfiques

LA CHAPELLE, J. B. (1746). *Institutions de géométrie*. Vol. 1. 3a ed. Paris: Chez Debure l'Aîné.

— (1757). *Institutions de géométrie*. Vol. 2. 3a ed. Paris: Chez Debure l'Aîné.

— (1775). *Traité de la construction théorique et pratique du scaphandre ou du bateau de l'homme, approuvé par l'Académie des Sciences*. Paris: Chez Debure.

ROUSSEAU, J. J. (1762). *Émile*. La Haia: Chez Jean Néaulme.

TESTA, G. (2000). «L'enseignement des coniques à travers une approche historique: comment saisir un texte?». *Repères-IREM*, 41, p. 105-119.

# PROJECTE EDUCATIU: REPRODUCCIÓ A ESCALA DE TRES ELEMENTS DE LA MÀQUINA DE VAPOR DE FRANCESC SANTPONÇ I ROCA

**MARIA MONTAVA**

CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *projecte educatiu, màquina de vapor del segle XIX, Francesc Santponç, IES Esteve Terradas*

## **An educational project involving the scale reproduction of three elements of Francesc Santponç i Roca's steam engine**

*Summary: In this paper we present the results of an educational project that extended over a period of three school years. The main goal was to reproduce three elements of Francesc Santponç's steam engine as models. The students who were involved in the project were taking the Mechanical Manufacturing Training course. Two other goals of the project were the introduction of the history of science and technology into the educational curriculum, and the presentation of each model with a report at the annual Bonaplata Youth Awards competition. Here we explain the didactic sequence which we designed and the mechanization of the models that were built, all three of which took the first prize in the competition. The conclusions provide an overview of the goals which were achieved.*

*Key words: educational project, 19th-century steam engine, Francesc Santponç, Esteve Terradas High School*

## **Context educatiu i organització del projecte**

Aquest projecte educatiu es va portar endavant amb alumnes del cicle de fabricació mecànica a l'Institut Esteve Terradas de Cornellà. Els cursos escolars durant els quals es va desenvolupar foren 2015-2016, 2016-2017 i 2017-2018. Cada any s'escollia un grup de cinc alumnes que serien els responsables de portar endavant el projecte.

Els dos tutors que dirigien el projecte varen ser Àngel Carazo Garcia, professor del centre, que impartia diverses assignatures, i jo mateixa, Maria Montava Gadea, professora de matemàtiques en educació secundària i estudiant de doctorat en història de la ciència i la tècnica. El meu treball d'investigació gira al voltant de la màquina de vapor construïda per Francesc Santponç i Roca entre els anys 1804 i 1806.

Al llarg del curs escolar els alumnes aprenien els processos mecànics necessaris per portar endavant el projecte. Depenent de l'evolució del procés d'aprenentatge elegíem un màxim de cinc alumnes, que serien els responsables que el projecte anés endavant.

Podia implicar-s'hi qualsevol alumne que estigués inscrit al cicle de fabricació mecànica i que fos alumne del professor Àngel Carazo, qui havia de tutoritzar tots els processos mecànics. Aquesta circumstància va permetre que el projecte posés en contacte alumnes del cicle mitjà i del cicle superior, circumstància que va afavorir l'aprenentatge entre alumnes.

### **Eixos principals del projecte**

Aquest projecte va girar al voltant de tres eixos principals, que considerem igualment importants. Per una part, complia amb les especificacions d'un projecte competencial que posava a treballar conjuntament alumnes de diversos nivells que compartien els seus coneixements sobre processos mecànics. Aquest eix, que podríem anomenar *eix curricular*, va comptar amb la implicació d'altres professors que col·laboraren dedicant temps de les seves assignatures per ajudar a enllestir el projecte. Els objectius que giraven al voltant d'aquest eix eren els que especifica el currículum educatiu del cicle de fabricació mecànica i que descriurem, amb major profunditat, més endavant.

El segon eix el podem anomenar *eix historicotecnològic* i va ser l'eix des del qual va partir la proposta didàctica. Al voltant d'aquest eix giraven dos objectius principals. El primer objectiu va ser la introducció de la història de la ciència i la tècnica en el procés didàctic. El segon objectiu va ser fomentar la participació dels estudiants en la investigació de la màquina de vapor que Francesc Santponç va construir a Barcelona a principis del segle XIX. En efecte, el resultat de la feina dels estudiants va suposar una contribució a la història de la ciència i la tècnica amb la construcció de tres maquetes: el cilindre i el pistó de la màquina, el registre que feia la màquina automàtica i els engranatges que transformaven el moviment lineal en rotacional.

El tercer eix l'anomenarem *eix Premis Bonaplata Joves*; cada any, es presentava als Premis Bonaplata Joves la maqueta junt amb una memòria descriptiva. Aquests premis anuals són atorgats pel Museu de la Ciència i de la Tècnica i d'Arqueologia Industrial de Catalunya i tenen com a objectiu guardonar els estudiants que hagin dut a terme treballs enfocats a la recerca en el camp de la valoració del patrimoni industrial.

Tinguérem la satisfacció de guanyar el primer premi en la nostra categoria durant tres anys consecutius. Aquesta circumstància va donar una motivació extra i una predisposició de l'alumnat del centre a la participació en el projecte de l'any següent.

### **Seqüència didàctica que es va seguir**

Una de les dificultats del projecte era que els alumnes aprenien les tècniques de mecanització al mateix temps que les aplicaven a la mecanització de la peça. El disseny de la seqüència didàctica havia de facilitar una via per anar pas a pas en la consecució dels objectius. Cada any se seguien els passos següents per a la realització del projecte.

### Estudi de la peça a reproduir

Francesc Santponç va escriure una memòria sobre el procés de construcció de la seva màquina. La redacció d'aquesta memòria és un exemple de l'afany que tenia Santponç per la divulgació de la tecnologia, un aspecte que va poder desenvolupar amb la redacció de la revista *Memorias de Agricultura y Artes*, que es va començar a publicar l'any 1814 (Puig-Pla, 2002-2003). En la memòria, Santponç va incloure els plànols de la màquina amb la finalitat de donar a conèixer el seu disseny per poder ser reproduïda. La identificació d'aquesta memòria, manuscrita per Santponç, a la biblioteca de Foment del Treball ens ha facilitat uns plànols de la màquina molt ben acabats. Ja es coneixia un esborrany d'aquesta memòria, que va ser transcrita per Jaume Agustí Cullell l'any 1983 i publicada sense plànols (Agustí, 1983: 140-183).

Es mostrava als alumnes el plànol de la peça que havia de ser mecanitzada a escala. D'aquesta manera, s'emprava la història de la ciència per construir un projecte educatiu en el qual els estudiants aprendrien com havien evolucionat les tècniques d'una professió que estaven aprenent. Amb aquest projecte educatiu es va mostrar la situació de la tecnologia a Europa als segles XVIII i XIX i les dificultats dels primers passos en l'assimilació d'aquesta tecnologia en l'Estat espanyol (Roca-Rosell i Puig-Pla, 2010; Payan, 1969).

### Decisió de l'escala de la maqueta i realització dels plànols

Una vegada coneguda i estudiada la peça, la primera decisió que calia prendre era l'escala a la qual es construiria la maqueta. El material disponible en el taller i les dimensions de la peça a reproduir eren els que havien de marcar la decisió sobre la seva escala. Els alumnes havien de reflexionar sobre les opcions que tenien i argumentar bé la decisió presa.

Una vegada estava clara l'escala a la qual es construiria la peça, calia fer els plànols de cadascuna de les seves parts (vegeu fig. 1). Els tres programes disponibles al centre educatiu per fer els plànols foren Autocat versió 2014, Illustrator CC i Inventor. Els alumnes del cicle mitjà varen necessitar, durant el projecte, aprendre a utilitzar les funcions bàsiques dels programes.

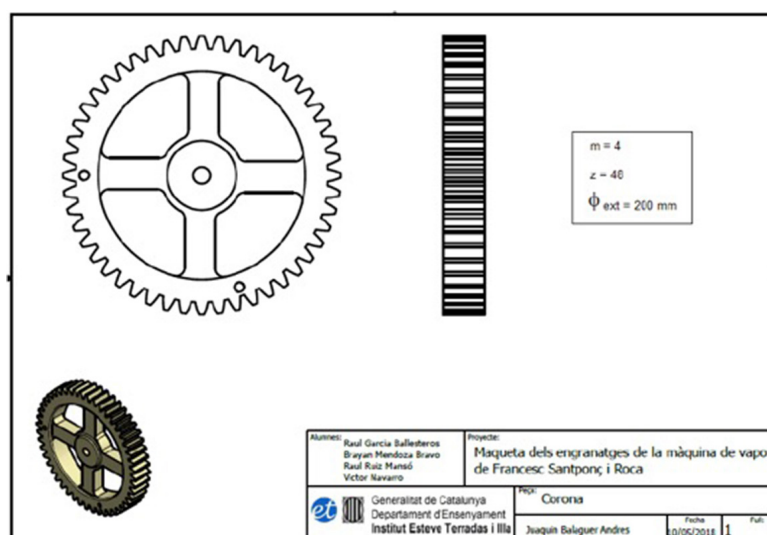


FIGURA 1. Plànol de la corona dels engranatges de la màquina de Santponç realitzat amb el programa Autocat.

FONT: Memòria titulada «Maqueta dels engranatges de la màquina de vapor de Francesc Santponç i Roca», presentada als XX Premis Bonaplata Joves.



### ***Mecanització de la maqueta i assoliment del currículum educatiu***

Aquest pas de la seqüència didàctica, junt amb la realització dels plànols de la peça, constituïa la part del projecte en la qual es portava endavant el currículum educatiu. Els tutors havien d'assegurar-se que els alumnes adquirien les competències bàsiques, que es complien els objectius específics de l'educació formal i que els alumnes assolien els conceptes, competències i procediments del seu perfil professional. Tot seguit descriurem les competències del currículum educatiu incloses en aquest projecte.

### ***Compliment de les especificacions de qualitat, seguretat i protecció ambiental***

Es va complir de forma estricta amb l'habitual utilització de roba i calçat d'acord amb les mesures de seguretat i protecció, així com el tractament adequat de residus per a reciclar.

### ***Mecanització per arrencament de ferritja i decisió dels processos de mecanització***

Les dues màquines eina que utilitzaren els alumnes per a la mecanització de les peces foren la fresadora i el torn universal. Per als alumnes del cicle mitjà, que participaren en el projecte, era el primer cop que utilitzaven aquestes màquines i aprengueren a preparar-les, programar-les i operar-hi.

Per als processos més senzills de mecanitzat de la peça es van utilitzar la serra de tall de cinta, la foradadora vertical de columna, la serra caladora, la moladora radial i l'ús de la llima bàsica per a l'ajust de peces.

Tots els processos requerien molta precisió, tant els més senzills com els més complicats. Per als processos que varen requerir un aprenentatge més profund (a part de la mecanització per arrencament de ferritja amb el torn universal i la fresadora), es va fer ús de tècniques de roscat emprant mascles de rosca mètrica així com la soldadura amb arc elèctric, amb elèctrode de rútil E6013, i la soldadura oxiacetilènica.

Per al tractament de material es va utilitzar el forn elèctric industrial i empavonament amb submersió amb oli mineral SAE 20.

### ***Ús d'instruments de mesura***

La precisió requerida en l'ajust dels components de les peces mecanitzades requeria el bon ús d'instruments de mesura més específics. Els alumnes del projecte utilitzaren el peu de rei per mesurar diàmetres, gruixos, fondària o l'amplada d'una escletxa o cavitat, amb rang de mesura de 0-150 mm amb una precisió de 0,02 mm. Per mesurar gruixos amb major precisió, s'utilitzà el micròmetre amb un rang de mesura de 0-25 mm i una precisió de 0,001 mm. S'utilitzaren galgues passa no passa per verificar forats i diàmetres exteriors. Per determinar la inclinació d'una superfície o l'excentricitat d'un eix o d'una roda, es va emprar el rellotge comparador amb una precisió de 0,001 mm. I la utilització del goniòmetre per a la divisió d'angles.

### ***Resolució de les incidències relatives a l'activitat professional i col·laboració amb l'equip de treball actuant amb responsabilitat i tolerància***

Les inevitables dificultats que presenta la posada en marxa de qualsevol projecte és una oportunitat per enfrontar els alumnes a la presa de decisions per resoldre les incidències relatives a qualsevol activitat professional. La competència en l'anàlisi i resolució de problemes va ser treballada en diverses ocasions al llarg de la seqüència didàctica; es parlarà de les dificultats del projecte i de les resolu-

cions que es varen adoptar als apartats següents d'aquest treball, en els quals s'explica el procés de mecanització de les tres maquetes.

Una de les preocupacions dels tutors ha sigut la supervisió de la repartició de la feina i la coordinació de l'equip d'alumnes responsables del projecte. L'èxit en la consecució d'aquesta competència marcada en el currículum educatiu era essencial per realitzar amb reeiximent l'assemblatge final de les peces de la maqueta.

### **Redacció d'una memòria explicativa del procés**

Cada memòria es redactava per explicar el procés de mecanització de cadascuna de les tres maquetes. Les memòries consistiren en una descripció de la màquina de vapor i de forma més específica de la part de la màquina que seria mecanitzada.

S'inclouïen a la memòria els plànols de la peça a mecanitzar amb totes les seves parts. S'explicaven tots els passos en la mecanització de la peça i les dificultats que va presentar el procés de mecanització, així com una explicació de com varen ser superades.

### **Primer any del projecte: maqueta del cilindre i el pistó de la màquina de vapor de Francesc Santponç i Roca**

El primer any del projecte es va dedicar a la reproducció a escala del cilindre i el pistó de la màquina. El tipus de cilindre que va utilitzar Santponç era de doble efecte. En aquest tipus de cilindres s'introduïa el vapor per la part de dalt i de sota del pistó alternativament, per impulsar-lo cap amunt i cap avall. Per efecte de la diferència de pressió, provocada pel condensador, extern al cilindre, es produïa la sortida del vapor del cilindre, que afavoria la baixada i la pujada del pistó. Per entendre les característiques principals d'un cilindre de doble efecte i l'evolució de la tecnologia del vapor fins a l'època de Santponç, podeu consultar Montava (2014: 39-45). Podeu consultar la patent atorgada a James Watt per al cilindre de doble efecte a Robinson i Musson (1969: 97-111). El primer any del projecte es va donar rellevància als personatges més importants que contribuïren al disseny del cilindre de doble efecte i a la difusió d'aquesta tecnologia. Com a exemples més destacats volem mencionar James Watt i Agustín de Betancourt (Robinson i Musson, 1969; Gouzévich, 2017).

### **Cilindre i pistó**

Les dimensions de la maqueta del cilindre i el pistó vingueren determinades pel material de què es disposava al taller de mecànica; es va utilitzar un tub d'acer de 150 mm de diàmetre interior. Aquesta mesura havia de determinar totes les altres del cilindre i el pistó de la maqueta. En aquest punt es va haver d'afrontar el primer problema del projecte: els plànols dibuixats per Santponç no presentaven cap mesura i no podíem saber les mesures de la màquina de Santponç. Per resoldre aquest escull, decidírem fer la maqueta en proporció als plànols dibuixats per Santponç. Tenint en compte que el diàmetre interior del cilindre dels plànols de Santponç era de 20 mm, l'escala de la maqueta respecte als plànols de Santponç va resultar de 7,5:1.

Per mecanitzar el pistó, es va utilitzar el torn universal i la precisió amb què es va ajustar el pistó a la camisa del cilindre va ser de 0,05 mm. Encara que podien haver fet ús d'una junta de PVC que hauria assegurat un ajust de molta precisió, es va decidir utilitzar cànem per a aquest ajust. Aquesta decisió es va prendre per ser un procediment d'ajust típic de l'època de Santponç.

### ***La tija de l'èmbol i pla inclinat de la tapa posterior del cilindre***

El diàmetre de la tija de l'èmbol tenia un gruix de 10 mm i fou mecanitzada amb un acer no calibrat que va presentar una veta en el seu diàmetre exterior. Amb un diàmetre tan petit, qualsevol deformació de l'acer té major incidència en l'acabat de la peça. Davant la dificultat de rebaixar aquesta veta, decidírem retocar el diàmetre de la tapa anterior perquè la tija pogués passar sense dificultat i amb un ajust òptim.

Santponç va dissenyar la tapa posterior del cilindre amb un pla inclinat perquè l'aigua que es condensava a l'interior del cilindre tingués una sortida fàcil pel tub inferior d'entrada i sortida del vapor.

Aquest pla inclinat va ser mecanitzat amb la fresadora i va ser la peça que més càlculs trigonomètrics va requerir. Aquests càlculs es feren per poder inclinar la fresadora amb l'angle necessari respecte a la superfície de la tapa.

### **Segon any del projecte: maqueta del registre de la màquina de vapor de Francesc**

#### **Santponç i Roca**

El registre era un dispositiu que permetia que la màquina funcionés automàticament sense la necessitat d'un tècnic que controlés les vàlvules de la màquina. En el cas de la màquina de Santponç, el seu registre presenta un interès històric especial: Santponç va considerar que aquesta part de la màquina era una contribució original que, segons les seves paraules, aconseguia alleugerir la màquina i fer-la progressar (Agustí, 1983: 147).

Les solucions per a registres que es troben en dissenys de màquines descrites en obres contemporànies a Santponç consistien en palanques, urpes i contrapesos que estaven enganxats a la tija del pistó mitjançant una corredissa. La corredissa consistia en una post, normalment de fusta, que es movia amb la tija del pistó i impulsava el moviment de palanques, urpes i contrapesos que obrien i tancaven les vàlvules en el moment precís.

A mesura que les màquines de vapor evolucionaven, anaven incorporant elements nous com el condensador, introduït per James Watt, i la innovadora idea del cilindre de doble efecte, que requeria dues vàlvules per al cilindre en lloc de només una. Aquestes innovacions provocaren que la funció del registre fos cada vegada més complicada, en haver d'automatitzar cada vegada un nombre major de vàlvules.

Santponç defensava que el registre de la seva màquina tenia l'avantatge de ser una peça resistent de molta durada. El problema dels desajustos de les vàlvules governades pels registres provocava parades en la producció tèxtil segons testimonis escrits de l'època (Robinson i Musson, 1969).

El registre de Santponç té un disseny molt diferent als de la seva època, perquè consisteix en un prisma de base hexagonal amb un pistó en forma de cilindre al seu interior. En l'apartat següent se n'explicarà amb més detall el disseny i funcionament.

### ***Descripció i mecanització del registre***

El registre dissenyat per Santponç consistia en un prisma amb base octogonal que tenia a dintre una peça cilíndrica de base circular que ocupava tota la seva longitud i podia girar un quart de circumferència en els dos sentits. Al registre de Santponç arribaven sis conductes que s'unien a ell a través de les superfícies planes de l'octàgon exterior. Dos dels conductes partien del registre i arribaven al cilindre de la màquina. Dos conductes més arribaven al condensador i els dos últims estaven connectats a la caldera (vegeu fig. 2).

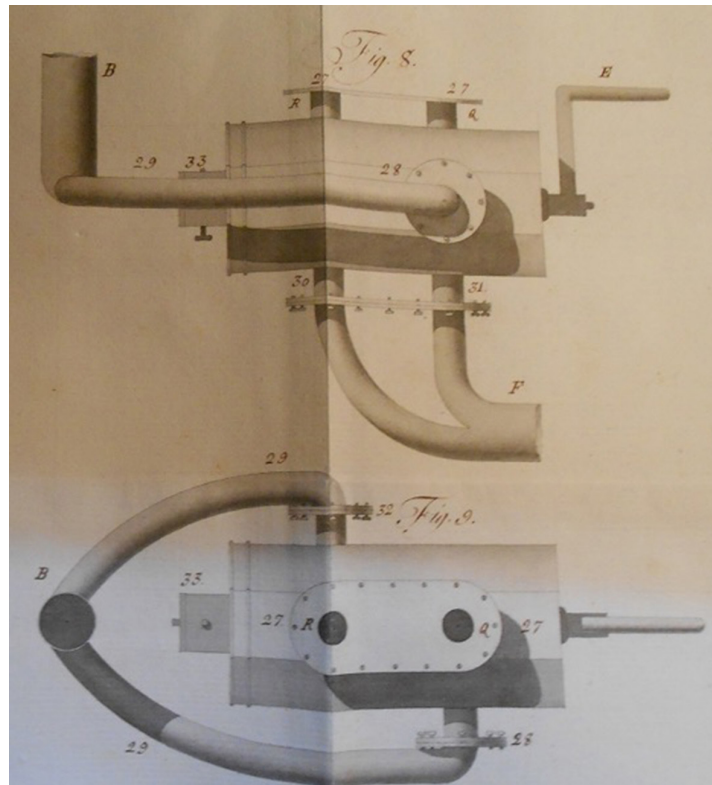


FIGURA 2. Registre de la màquina de Santponç dels plànols de la seva memòria.

FONT: Memòria manuscrita «Noticia de una nueva bomba de fuego», de Francesc Santponç i Roca. Biblioteca de Foment del Treball.

Un dels extrems del cilindre de base circular situat a l'interior del registre s'unia a un manubri. La rotació del manubri provocava el moviment del cilindre interior, que podia girar un quart de volta relliscant a dintre de l'octàgon. Aquest moviment feia possible totes les combinacions possibles i necessàries de pas del vapor pels conductes de la màquina. El registre permetia controlar el moment exacte en què el vapor havia d'entrar al cilindre de la màquina i del condensador o sortir-ne.

Es realitzaren dues maquetes iguals del registre; una d'elles era completa i reproduïa el registre a escala 1:2 respecte a les mesures dels plànols realitzats per Santponç. De la segona maqueta es va seccionar un quart del prisma exterior perquè es pogués observar el moviment del pistó interior.

A la memòria descriptiva del procés de mecanització d'aquesta peça, els alumnes varen explicar les dues posicions possibles del registre i els elements que es posaven en contacte en cadascuna d'elles.

### **Tercer any: maqueta dels engranatges de la màquina de vapor de Francesc Santponç i Roca**

L'últim any del projecte es dedicà a reproduir els engranatges de la màquina de Santponç que transformaven el moviment lineal del pistó en moviment rotacional. Els engranatges són rodes dentades tallades de tal manera que en girar la roda (o rodes) motriu es produeix una transmissió exempta de lliscament. A diferència de les corretges, que poden patinar sobre la politja, en els engranatges la transmissió és íntegra i segura.

Es va construir la maqueta dels engranatges a la mateixa escala que la maqueta del cilindre i el pistó per acoblar totes aquestes peces i donar una millor idea de la màquina de vapor sencera.

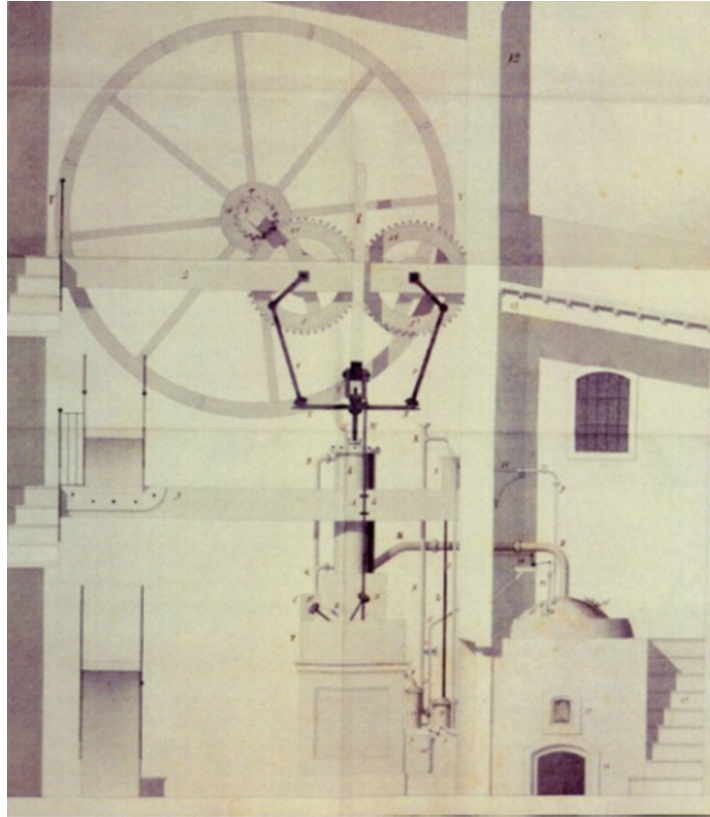


FIGURA 3. Plànol complet de la màquina realitzat per Santponç on es veuen els engranatges, el pinyó i el volant d'inèrcia.

FONT: Memòria manuscrita «Noticia de una nueva bomba de fuego», de Francesc Santponç i Roca. Biblioteca de Foment del Treball.

Els engranatges de la màquina de Santponç consisteixen en dues rodes o corones iguals amb quaranta-vuit dents que estaven unides al pistó de la màquina mitjançant dos braços basculants i una barra horitzontal. Una de les dues rodes estava engranada a un pinyó que tenia la tercera part del diàmetre d'aquestes. El pinyó estava col·locat a l'eix d'un volant d'inèrcia i tenia setze dents (vegeu fig. 3).

### ***Procés de construcció de les dues rodes dentades***

Com que havíem d'acoblar els engranatges amb la maqueta del pistó i el cilindre, havíem de respectar l'escala utilitzada, que era 7,5:1.

Llavors, seguint aquesta escala, el diàmetre de les rodes dentades havia de ser de 465 mm, però als tallers del centre no disposàvem de torns ni fresadores que poguessin fixar una peça tan gran per fer-la girar a altes revolucions. El diàmetre màxim que podem mecanitzar amb la seguretat requerida és de 300 mm per als torns i de 250 per a les fresadores.

Per solucionar aquest inconvenient, decidírem dividir el diàmetre de les rodes entre dos. Això volia dir que, a la maqueta, totes les mesures referents als engranatges serien la meitat del que haurien de ser respecte de les mesures del cilindre. Llavors, les rodes dentades tindrien un diàmetre exterior de 232,5 mm.

D'acord amb aquesta mesura, i utilitzant les fórmules matemàtiques, calia calcular el mòdul de la fresa per tallar les dents de l'engranatge. Els càlculs ens indicaven que el mòdul havia de ser  $m = 5$ . Totes les fórmules i els càlculs es varen detallar a la memòria descriptiva del procés de mecanització.

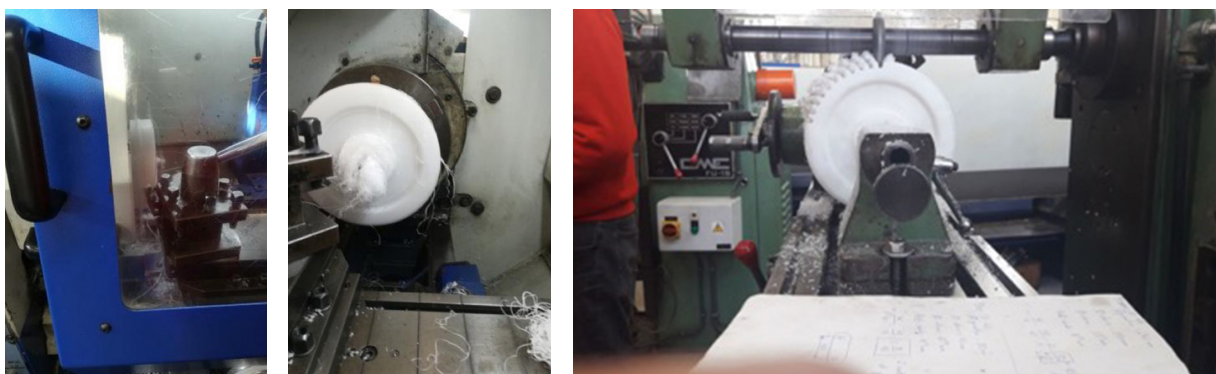
No vàrem trobar al taller del centre cap fresa de mòdul 5. Es va contactar amb empreses del sector metallúrgic que col·laboren amb el centre en diversos programes, però tampoc trobàrem cap fresa d'aquesta mida i l'opció de comprar-la resultava molt cara: 264 € més IVA. Aquesta circumstància ens va obligar a prendre la decisió d'utilitzar una fresa de mòdul 4, aconseguida del taller particular del tutor del projecte. En prendre la decisió de baixar de mòdul, ens vàrem veure obligats a reduir el diàmetre de les rodes de 232,5 mm a 200 mm. La conseqüència d'aquesta decisió ha sigut que el diàmetre dels engranatges de la maqueta és 32,5 mm més petit que el que hauria de ser per guardar la proporció que preteníem entre el cilindre i les rodes dentades de la maqueta.

Es va utilitzar niló per construir les rodes dentades i el pinyó, perquè en les instal·lacions les barres d'acer més grans eren de 120 mm de diàmetre. El niló és un material fàcil de mecanitzar i lleuger, que va facilitar la mecanització posant en pràctica exactament els mateixos processos i càlculs necessaris que en el cas d'haver utilitzat acer.

Voldríem destacar que, segons indica el currículum educatiu, en l'assignatura d'elements mecànics del cicle mitjà de fabricació mecànica, cal estudiar el càlcul d'engranatges, però no la seva mecanització i muntatge, que estan programats per al cicle superior. Aquest projecte va ser portat endavant per alumnes del cicle mitjà que varen aprendre a mecanitzar i ajustar engranatges abans de temps. Amb l'ajuda del seu professor tutor i alumnes del cicle superior que s'hi implicaren, no van tenir grans problemes per aconseguir-ho.

A partir del cilindre de niló de què disposàvem, es tallaren, amb la serra de tall vertical, dos discos d'un gruix de 30 mm. Com que calia reduir el diàmetre de 300 mm a 200 mm, s'utilitzà el torn amb eina de cobalt a 625 rpm. També s'utilitzà el torn per fer el buidatge de les corones dentades (vegeu fig. 4, 5 i 6).

S'utilitzà la fresadora universal per distribuir les dents de forma equidistant al llarg del perímetre de les corones. Per fer-ho, s'utilitzà un divisor universal que disposa d'una maneta accionada per l'operari de forma que, en girar-la quaranta voltes, el plat on fixem la peça gira només una volta. Disposàvem de tres jocs de plats normalitzats, amb sis circumferències de forats equidistants cada un d'ells, que ens van permetre fer qualsevol tipus d'operacions. Com que havíem de mecanitzar quaranta-vuit dents, que no és un nombre divisible per quaranta, necessitàrem utilitzar un dels plats amb forats circumscrits per poder distribuir uniformement les quaranta-vuit dents al voltant de les corones.



FIGURES 4, 5 i 6. En ordre d'esquerra a dreta: mecanització de les dents de les corones amb fresa de mòdul 4, buidatge de les corones i reducció de diàmetre utilitzant el torn universal.

FONT: Elaboració pròpia.

Respecte al pinyó de la màquina de Santponç, és una peça que compta amb setze dents. Perquè els engranatges funcionin correctament, cal utilitzar el mateix mòdul ( $m = 4$ ) utilitzat per mecanitzar les dents de les dues rodes dentades. El mecanitzat del pinyó es va fer utilitzant les mateixes màquines, eines, procediments i materials.

### **Mecanització del volant d'inèrcia**

Per al cas del volant d'inèrcia, el seu diàmetre havia d'excedir exageradament la mesura màxima acceptada pel torn i la fresadora. Per tant, decidírem reduir-lo, igual que les rodes dentades, a la meitat respecte de les mesures de la maqueta del cilindre i el pistó de la màquina. Amb tot això, el diàmetre del volant d'inèrcia havia de ser de 700 mm. I es va decidir fer-lo de fusta i manualment. Utilitzàrem un compàs de corda per traçar les circumferències i un goniòmetre manual per traçar les finestres per al seu buidatge. Fèrem tots els talls traçats amb una caladora (vegeu fig. 7).



FIGURA 7. Mecanització del volant d'inèrcia amb caladora.  
FONT: Elaboració pròpia.

### **Mecanització de les bieles**

Aquestes peces són les úniques que guarden la proporció respecte al cilindre i el pinyó. El material de fabricació va ser acer F1120.

Per mecanitzar aquestes peces, s'utilitzà un rosset per traçar línies paral·leles i el compàs. El traçat de les bieles es va fer sobre una platina de metall, on quedaren dibuixats els centres i radis exteriors de les bieles. La platina es va tallar amb la serra de cinta vertical i es mecanitzaren les peces amb una llima plana de 8 polzades.

Per unir les bieles amb les rodes dentades i amb la biela horitzontal, es varen utilitzar cargols Allen de mètrica 10 amb les seves femelles.

Per evitar l'oxidació, es va portar endavant un procés d'empavonament de les bieles amb forn elèctric submergint les peces amb oli mineral.

### Novetats sobre el càlcul de l'escala de les maquetes

El segon any del projecte vaig trobar al llibre d'Agustí una nova dada: el diàmetre interior real del cilindre de la màquina de Santponç. Aquesta dada, junt amb altres mesures, es pot consultar a l'obra de Jaume Agustí (1983: 134-137). Malauradament Agustí no cita la font d'aquestes notes, però vam poder donar una escala de les nostres maquetes respecte de la màquina original. El diàmetre interior del cilindre de la màquina era, d'acord amb les mesures de l'època, d'1 peu, 3 polzades i 3 línies, que equival a 336,02 mm.<sup>1</sup> Així, podem afirmar que l'escala de les maquetes del cilindre i el pistó i dels engranatges respecte de la màquina de Santponç ha sigut d'1:2,24 (vegeu fig. 8, 9 i 10).



FIGURES 8, 9 i 10. Resultat de les maquetes en ordre d'esquerra a dreta: cilindre, registre i engranatges acoblats al pistó del cilindre.

FONT: Elaboració pròpia.

### Conclusions

Aquest projecte educatiu, de tres anys de durada, ha utilitzat la història de la ciència i la tècnica amb tres objectius. El primer ha sigut que els alumnes valoressin les investigacions en aquest camp. El segon, que reflexionessin sobre la importància de la mecànica al llarg de la història de la humanitat i la seva contribució a la revolució industrial. I encara un tercer objectiu, més ambiciós: que els alumnes contribuïssin en aquest camp d'investigació aportant tres maquetes de tres parts fonamentals de la màquina de vapor de Francesc Santponç construïda a Barcelona entre els anys 1804 i 1806.

Les maquetes construïdes pels estudiants del cicle de fabricació mecànica de l'Institut Esteve Terradas de Cornellà de Llobregat van ser: el cilindre i el pistó de la màquina de vapor, el registre que feia la màquina automàtica i els engranatges que transformaven el moviment lineal en rotacional. Aquestes maquetes suposen una contribució a la investigació sobre la participació de Francesc Santponç i Roca en la difusió de la tecnologia del vapor a Catalunya i l'Estat espanyol.

Els alumnes que participaren en el projecte no només adquiriren les competències referides en el currículum educatiu per al seu curs escolar, sinó que adquiriren competències de cursos posteriors. Aquest avançament curricular es va produir de forma puntual sense suposar un impediment en els estudis dels participants. L'avançament curricular es va donar no només per les necessitats del projecte, sinó també a causa d'una motivació extra per part dels estudiants.

1. 1 peu són 12 polzades, 1 polzada són 25,4 mm i 1 línia són 1,94 mm.



Cada any es va presentar la maqueta construïda junt amb una memòria descriptiva del procés de mecanització als Premis Bonaplata Joves, atorgats pel Museu de la Ciència i de la Tècnica i d'Arqueologia Industrial de Catalunya. La participació anual en aquests premis ha facilitat l'organització del treball en equip i la motivació de l'alumnat.

La circumstància de guanyar el primer premi, en la nostra categoria, durant els tres anys consecutivament, va donar una motivació extra i una predisposició de l'alumnat del centre a la participació en el projecte de l'any següent.

Per a la tutora del projecte, estudiant de doctorat en història de la ciència i la tècnica, aquest projecte ha contribuït al seu treball de recerca sobre la màquina de vapor construïda per Francesc Santponç i Roca. El fet de discutir, amb professionals de la mecànica, sobre el funcionament de la màquina de vapor i la mecanització i el muntatge de les peces de les maquetes li ha permès aprofundir en el coneixement de la màquina i entendre'n millor el funcionament. Aquesta experiència ha suposat per a ella poder immersir-se en el context actual de tècniques mecàniques i ha suposat una ajuda important en la seva tesi.

### **Agraïments**

Donem les gràcies a totes les persones i institucions que fan possibles els Premis Bonaplata Joves, que permeten fomentar la recerca i l'interès per la història de la ciència i la tècnica. Els nostres alumnes han tret bon profit de la participació en aquests premis, en sentir-se participants de la recerca sobre la contribució de Francesc Santponç a la difusió de la tecnologia del vapor a Catalunya i l'Estat espanyol.

Així mateix, vull agrair a Antoni Roca Rosell, el tutor de la meua tesi, el seu suport en la realització d'aquest projecte educatiu. I a la professora Maria Rosa Massa-Esteve que m'hagi donat l'oportunitat d'explicar aquesta experiència educativa en la XVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament.

Aquesta comunicació és un homenatge al professor Àngel Carazo Garcia, que ens va deixar el 2 de juny de 2019. En nom meu i dels seus alumnes, li dediquem aquest treball que mai hauria pogut fer-se realitat sense ell. Els seus coneixements sobre mecànica i la passió que tenia per ensenyar varen marcar moltes generacions d'alumnes. Ni jo, ni cap dels seus alumnes, el podrem oblidar mai.

## Referències bibliogràfiques

AGUSTÍ, J. (1983). *Ciència i tècnica a Catalunya en el segle XVIII*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

GOUZÉVICH, I. (2017). *Augustin de Betancourt (1758-1824): un ingénieur des Lumières au service de la modernité, ou le parcours européen d'un illustre inconnu*. [No publicat]

MONTAVA GADEA, M. (2014). «Francesc Santponç i Roca i la màquina de Gensanne (1802?)». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 14, p. 35-83.

PAYAN, J. (1969). *Capital et machine à vapeur au XVIII<sup>e</sup> siècle*. París: Mouton & Co.

PUIG-PLA, C. (2002-2003). «Las Memorias de Agricultura y Artes (1815-1821). Innovación y difusión de

tecnología en la primera industrialización de Cataluña». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 5, p. 27-58.

ROBINSON, E.; MUSSON, A. E. (1969). *James Watt and the steam revolution*. Londres: Adams and Dart.

ROCA-ROSELL, A.; PUIG-PLA, C. (2010). «The beginnings of mechanical engineering in Spain: The contribution of Francesc Santponç i Roca (Barcelona, 1756-1821)». *History of Technology*, vol. 30, p. 32-45.

SANTPONÇ, F. (1804-1806). «Noticia de una nueva bomba de fuego». Barcelona. [Memòria manuscrita localitzable a la Biblioteca de Foment del Treball. J. Agustí (1983) la va transcriure a partir del manuscrit de la família Santponç]



## LA METODOLOGIA DIDÀCTICA EN L'ÀLGEBRA DE JOSEP SARAGOSSÀ (1627-1679)

**ANNA EROLES CRIVILLÉ**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *àlgebra, Josep Saragossà, Espanya al segle XVII, ensenyament*

### **The didactic methodology in Josep Saragossà's algebra (1627-1679)**

Summary: *This paper reflects on the didactic nature and teaching of mathematical knowledge behind the algebra work of the Jesuit Josep Saragossà. In his *Arithmetica Universal* one finds helpful original tools for the reader's comprehension as well as a very concise teaching methodology. Additionally, the study of this book helps to reveal the influence of Viète's algebra on its writing and practical implementation. We analyse the distinctive features of Saragossà's style and of his methodology of study along with other teaching elements in this work.*

Key words: *algebra, Josep Saragossà, 17th-century Spain*

### **Introducció**

L'objectiu que es persegueix en aquesta publicació és la presentació dels diferents elements didàctics i metodològics d'ensenyament particular que s'han trobat en l'obra *Arithmetica universal*, del jesuïta Josep Saragossà (1627-1679). En totes les obres d'aquest autor es descriu un caràcter didàctic i focalitzat en la transmissió del coneixement de les matemàtiques. En concret, en la seva *Arithmetica* es troben elements originals que tenen la finalitat d'ajudar el lector en la comprensió de la seva pròpia obra, com els índexs que apareixen al final del llibre o la taula de caràcters que serveix com a diccionari de consulta. L'ordre de lectura i la pràctica dels exemples són clau en la metodologia d'estudi d'aquesta *Arithmetica*. La rellevància més significativa de l'obra rau en la clara influència de l'àlgebra de Viète en la redacció i el tractament de la resolució d'equacions. Així doncs, es considera fonamental el paper de Saragossà com a difusor de l'àlgebra vietiana a l'Espanya del segle XVII (Eroles, 2019).

### Josep Saragossà i l'*Arithmetica universal*

L'Espanya del segle XVII es trobava immersa en una crisi política, econòmica i social que no va ajudar al desenvolupament ni a la difusió del coneixement ni de la ciència matemàtica. Mentrestant, el procés d'algebraització, entès com l'articulació entre àlgebra i geometria, creixia per la resta d'Europa i es reforçava amb la innovació del mètode analític, nascut de les mans de François Viète (1540-1603) i la seva *In artem analyticem isagoge* del 1591, per treballar amb l'àlgebra (Eroles, 2019).

Josep Saragossà, nascut el 1627 a la ciutat d'Alcalà de Xivert, Castelló, va ser un jesuïta entregat a la seva vocació religiosa, però apassionat de la ciència de les matemàtiques. Va dedicar la seva vida a l'ensenyança i la transmissió del coneixement donant classes de retòrica, filosofia i teologia per diferents ciutats d'Espanya. L'afició per les matemàtiques i l'astronomia el van fer créixer com a científic, també gràcies a la seva vinculació a la comunitat de jesuïtes i reforçat amb la participació en tertúlies de ciències que va organitzar durant la seva estada a València i que van donar inici a la renovació científica de la ciutat a finals del segle XVII (Navarro, 1996). Finalment es va traslladar a Madrid per ocupar una càtedra de matemàtiques als Reials Estudis del Col·legi Imperial, dirigit per jesuïtes, i per ajudar el rei Carles II en la seva educació científica. Saragossà va morir el 1679 a Madrid, un mes abans de complir els cinquanta-dos anys (Recasens, 2010).

El 1669 Saragossà publicà a València la seva obra *Arithmetica universal que comprehendit el arte menor y maior, álgebra vulgar y especiosa* (vegeu fig. 1). Al llarg del llibre s'intueixen diferents lloances a l'àlgebra com una branca en ella mateixa, fonamentada en l'«arte menor» o aritmètica i l'«arte maior». L'obra està estructurada en quatre llibres: *Libro I. De la arithmetica, Libro II. De las raizes, Libro III.*

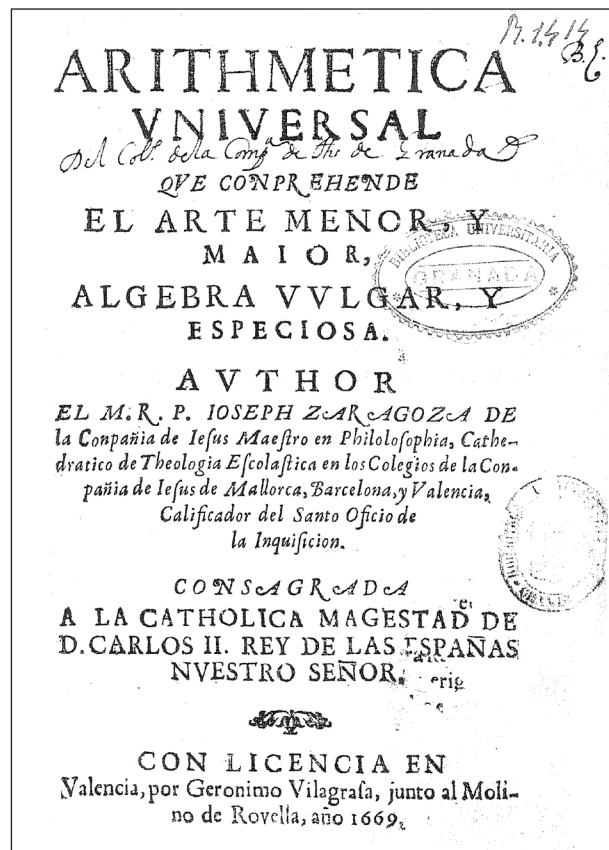


FIGURA 1. Portada de l'*Arithmetica* de Saragossà.  
FONT: Zaragoza, 1669: portada.

*De la algebra* i *Libro IV. De los enigmas*. A aquesta estructura se li uneix una dedicatòria, una censura i la introducció inicial i un curiós índex de continguts i capítols al final amb una taula de caràcters amb la intenció de funcionar com a diccionari de consulta. En l'*Arithmetica* de Saragossà predomina l'ús d'una nova simbologia i un nou tractament de les equacions amb una metodologia analítica adaptada de l'anàlisi vietiana per identificar la incògnita buscada. Viète està present en citacions textuais durant la presentació de l'àlgebra de Saragossà i també en la vessant pràctica de la resolució de problemes. Tot i així, l'objectiu que persegueix l'autor amb la presentació i aplicació del mètode analític vietianà és desenvolupar un mètode propi i original (Eroles, Massa-Esteve i Blanco, 2019).

En els apartats següents ens centrarem en el caràcter didàctic dels diferents elements que apareixen al llarg de l'obra *Arithmetica* de Saragossà i que ajuden a l'objectiu de la difusió i transmissió del coneixement. Així mateix, es presenten fragments en què es deixa constància de la metodologia emprada per l'autor i el desig cap al lector.

### Vessant didàctica i metodologia

Saragossà fa notar al llarg de la seva *Arithmetica*, i sobretot en la seva introducció, on es descriu detalladament la metodologia d'estudi, la seva vocació per l'ensenyament de les matemàtiques. En les seves paraules menciona aquest objectiu didàctic i el seu desig i encoratjament cap al lector perquè pugui comprendre i desenvolupar les tècniques de resolució que es proposen al llarg de l'obra. En l'apartat següent s'analitzen alguns dels fragments del llibre en què es fa evident aquesta finalitat.

Un altre tret rellevant que dona consistència a la didàctica de l'obra és el caràcter universal en l'exposició del contingut. A través del llenguatge simbòlic, és a dir, la simbologia de les lletres per substituir tant caràcters coneguts com incògnites, l'autor intenta mostrar la universalitat dels procediments per treballar tant amb l'«arte maior» com amb la seva extensió a l'àlgebra vietiana. La nova manera de treballar la resolució d'equacions persegueix la generalització del mètode, així com la substitució dels valors i de les incògnites per símbols per facilitar al lector el desenvolupament dels problemes (Eroles, Massa-Esteve i Blanco, 2019).

És en la introducció de l'*Arithmetica* on Saragossà presenta la metodologia d'estudi al llarg de diferents apartats: «La materia de este libro», «El estilo y el methodo», «Los caracteres propios del algebra», «La explicacion de caracteres y terminos» i, finalment, «El methodo de estudiar». En aquest últim, l'autor descriu l'ordre recomanat de lectura i aprenentatge per al lector, remarca els capítols significatius que cal treballar amb més deteniment i posa èmfasi en la pràctica de la resolució d'exemples i problemes senzills, abans d'aprofundir en la complexitat d'altres enigmes.

A més, l'*Arithmetica* es complementa, com ja hem dit en la descripció de la seva estructura, amb elements de suport al lector, com és el cas de la taula de caràcters que apareix al final del llibre, en la qual es detalla la notació emprada en la resolució de problemes. També l'índex de continguts és un element original en les obres del segle XVII a Espanya. Aquest índex ajuda a identificar i localitzar els conceptes de forma ràpida dintre el llibre. En parlarem més a continuació. Aquests elements addicionals afavoreixen l'evidència de l'objectiu didàctic de l'obra.

### Evidències didàctiques

Hem reservat aquesta última secció per analitzar detalladament fragments de l'*Arithmetica* en què trobem citacions i elements relacionats amb la divulgació del coneixement i la vessant didàctica que emmarca l'obra. Els apartats de la introducció mencionats anteriorment en són el primer exemple.

*La materia de este libro.*

Es el Arte menor, y maior. Fue mi intento no explicar mas que el Algebra, pues aun para ella sola era corto el volumen, pero atendiendo, que el mendigar principios agenos era imperfeccion de la obra, resolví ceñir una, y otra de fuerte, que sin otros principios pudiesse llegar el Lector; sino a entera comprehension, por lo menos a una mas que mediana noticia de las dos Arithmeticas.

FIGURA 2. «La materia de este libro».

FONT: Zaragoza, 1669: «Introducción».

*El estilo, y methodo*

Por si mesmos se manifiestan. Escribir en romance, fue inescusable para el intento, aunque con repugnancia de la pluma exercitada mas en el idioma Latino, que en el Castellano; porque mi deseo no es tanto dilatar la obra, como beneficiar a mi Patria. Los Autores, que en nuestra lengua han salido, son por la maior parte en la mesma prolixidad diminutos, y confusos en la enseñanza. Para obviar a estos daños, he procurado ceñir el estilo de fuerte, que la brevedad no fuesse a costa de la materia, ni de la claridad: Juntar estas tres cosas, es biendificil, pero no imposible. Lo que en esto he conseguido, queda a juicio del que sin päsion conferiere este breve libro con los muchos difusos, que hasta oy se han escrito de la materia.

FIGURA 3. «El estilo y el methodo».

FONT: Zaragoza, 1669: «Introducción».

En «La materia de este libro» l'autor introdueix les dues vessants de l'*Arithmetica*: l'aritmètica i l'àlgebra. Es presenten com «arte menor» i «arte maior» o, respectivament, les dues aritmètiques. A més, Saragossà separa l'àlgebra de l'«arte maior» per vincular-la a l'àlgebra especiosa introduïda a Europa per Viète. La tracta, doncs, com una disciplina de gran abast i que requereix una comprensió ben establerta. L'autor deixa dit que no desitja seguir estrictament les definicions fixades per autors anteriors i la seva manera de desenvolupar aquests dos «artes», sinó que pretén construir nous principis propis (vegeu fig. 2).

Per tal de facilitar la comprensió al lector, Saragossà tria el castellà com a llengua d'escriptura. D'aquesta manera s'evidencia la seva intenció d'afavorir la difusió del coneixement matemàtic a l'Espanya del segle XVII, que en aquell moment no estava enriquit d'autors castellans. A la vegada valora l'estil i el mètode en la redacció: brevetat i claredat, sense limitar la matèria, característiques clarament didàctiques (vegeu fig. 3).

Saragossà considera del tot necessari i essencial l'ús de la simbologia per poder treballar amb l'àlgebra. Ell creu en la universalitat del llenguatge per poder transmetre el coneixement. Així, segons ell, el fet que cada autor del segle XVI espanyol utilitzi diferents notacions i, en molts casos, no s'incloguin els «caràcters» en aquestes simbologies és causa de confusió per al lector. A més, afirma que ell mateix va haver de dissenyar i construir els caràcters tipogràfics de l'àlgebra inexistents en les publicacions espanyoles del moment (vegeu fig. 4).

*Los Caracteres propios del Algebra.*

Son el complemento de su perfeccion: la falta de ellos fue sienpre causa de confusion, y prolixidad. Gran motivo tuviera para quejarme de las inperfecciones de España, fino viera, que en Italia le faltaron a Marino. Ghetaldo, en Francia al P. Billi, y al P. Gaspar Scoto en la superior Alemania. No me pude reducir a sacar sin este complemento el libro, y viendo, que

que con dinero no se podia remediar el daño, por faltar los artifices; apliqué mi industria, y conseguí, lo que solo intentar, pareció a muchos temeridad. Hize por mi mano los punzones, matrices, y llaves: fundi todos los Caracteres enteros, y quebrados, que juzgué necesarios, sin perdonar a trabajo, ni gasto, por conseguir toda perfeccion.

FIGURA 4. «Los caracteres propios del algebra».  
 FONT: Zaragoza, 1669: «Introducción».

1. Prog. Geom.	2. Prog. Geom.	3. Prog. Geom.	Exponentes.	Nombres.	1. Caracteres.	2. Caracteres.
1	1.	1.	0			
2	4.	8.	1	Raiz.	R.	Z <sup>1</sup> .
4	16.	64.	2	Quad.	Q	Z <sup>2</sup> .
8	64.	512.	3	Cubo.	C.	Z <sup>3</sup> .
16	256.	4096.	4	Quad. Quad.	QQ	Z <sup>4</sup> .
32	1024.	32768.	5	Quad. Cubo.	QC	Z <sup>5</sup> .
64	4096.	262144.	6	Cubo Cubo.	CC	Z <sup>6</sup> .
128	16384.	2097152.	7	Q. Q. Cubo.	QQC	Z <sup>7</sup> .
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

FIGURA 5. «La explicacion de caracteres y terminos».  
 FONT: Zaragoza, 1669: «Introducción».

Un dels aspectes originals de la notació de l'Arithmetica es troba en la taula resum que s'adjunta al final de l'obra i que l'autor cita en l'apartat «La explicacion de caracteres y terminos» de la introducció afirmant que «es el unico remedio contra el Olvido» (vegeu fig. 5).

La taula mostra els símbols presentats al llarg de tots els llibres per ajudar el lector i tenir un «diccionari» de referència (vegeu fig. 6). Destaquem el fet d'utilitzar la mateixa lletra per definir tant la incògnita com la quantitat coneguda (Eroles, 2019).

### EXPLICACION DE LOS CARACTERES:

- 1<sup>o</sup> Primero. 2<sup>o</sup> Segundo. 3<sup>o</sup> Tercero, &c.
- × Multiplicar en cruz.
- + Mas. Lib. 1<sup>o</sup> S. 168.
- Menos. Lib. 1<sup>o</sup> S. 168.
- 1z<sup>1</sup> Vna Cantidad conocida, ò incognita.
- 1z<sup>2</sup> El Quadrado de essa Cantidad. L. 2. S. 6.
- 1z<sup>3</sup> El Cubo de la mesma.
- 1z<sup>4</sup> El Quadrado Quadrado.
- 1z<sup>5</sup> El Quadrado Cubo, &c. y lo mesmo es de qualquiera otras letras.
- $\frac{4z+1z}{6-1z}$  4 Quadrados mas 35 numeros partidos por 6 numeros menos 5 Cantidades: lo mesmo es de otros quebrados.
- √. o R. Raiz de algun numero. √√ Raizes.
- √<sup>2</sup> o R<sup>2</sup> Raiz Quadrada L. 2. S. 2.
- √<sup>3</sup> o R<sup>3</sup> Raiz Cubica, &c.
- ∝ Igual: como 6z ∝ 24: es 6z iguales à 24. &c. Libro. 3<sup>o</sup> S. 126:

FIGURA 6. Taula de caràcters emprats en la nova notació.  
 FONT: Zaragoza, 1669: 452.



Com ja havíem introduït anteriorment, Saragossà dedica un apartat de la seva introducció a la metodologia d'estudi, fet que remarca la importància d'aquesta per a l'autor. Descriu l'ordre de lectura de l'*Arithmetica* guiant el lector per cadascun dels llibres i destacant els capítols més rellevants i imprescindibles per poder avançar. Recomana entendre i realitzar primer els exemples del marc teòric i seguir amb altres problemes senzills i similars als ja realitzats. D'aquesta manera, el lector podrà arribar després a treballar els enigmes més complexos que s'exposen en l'últim llibre, *Libro IV. De los enigmas*, de l'*Arithmetica* (vegeu fig. 7).

**El metodo de estudiar**  
 Es el todo así en la Arithmetica, como en todas las ciencias. El primer cuidado del principiante ha de ser la noticia de las quatro reglas; pues con solas ellas podrá por sí mesmo llegar a lo sumo de la Arithmetica, si continua el estudio. Los Capítulos 7.<sup>o</sup> y 8.<sup>o</sup> del Libro 1.<sup>o</sup> son los mas necesarios de toda la obra. Para entrar en el segundo Libro, no hazen falta las Alligaciones, falsas posiciones, ni Combinaciones. Para el Libro 3.<sup>o</sup> bastan los cinco primeros Capítulos del segundo, como tambien para la maior parte del

del Libro 4.<sup>o</sup> aunque su plena intelligencia pide entera noticia de todos los tres Libros antecedetes. El primer exercicio ha de ser en los **exemplos del Libro**, luego **formar otros** a su imitaciō; y porq̄ no ha sido posible evitar todos los errores, devē corregirse primero cōforme la Tabla siguiente, q̄ cōtiene los principales!

FIGURA 7. «El metodo de estudiar».  
 FONT: Zaragoza, 1669: «Introducción».

Finalment, presentem alguns elements de suport a la lectura que apareixen al final de l'*Arithmetica*: l'índex de capítols i la taula de continguts. Ambdós serveixen de guia al lector per identificar fàcilment la matèria dins els llibres gràcies a l'afegit de la paginació (vegeu fig. 8).

**TABLA DE LOS CAPITVLOS.**

**LIBRO PRIMERO.**

**C**AP. 1. De los primeros principios. pag. 1.  
 Cap. 2. Del Sumar. pag. 4.  
 Cap. 3. Del Restar. pag. 7.  
 Cap. 4. Del Multiplicar. p. 10.  
 Cap. 5. Del Partir. p. 14.  
 Cap. 6. Pruebas de Multiplicar, y partir. p. 21.  
 Cap. 7. De los Quebrados. p. 24.  
 Cap. 8. Las quatro reglas de los Quebrados. p. 30.  
 Cap. 9. De las partes decimas. p. 36.  
 Cap. 10. Aplicación de los Quebrados, y decimas. p. 39.  
 Cap. 11. De la Razon, y proporcion. p. 44.  
 Cap. 12. De la Regla de Tres. p. 50.  
 Cap. 13. Composición de muchas proporciones. p. 54.  
 Cap. 14. Composición de dos Proporciones. p. 58.  
 Cap. 15. Composición de tres, y quatro proporciones. p. 65.

**INDICE DEL LIBRO.**

**A**  
 Algebra, y su definición. l. 3. p. 1.  
 Su Inventor. l. 3. p. 3.  
 Su Division. p. 4.  
 Algorithmo. l. 3. p. 7.  
 Alligacion, o mezcla. l. 1. p. 4.  
 Almagesto, o Algebra. l. 3. p. 1.  
 Apotome, o Residuo. l. 3. p. 10.  
 Aproximacion de raizes. l. 2. p. 40.  
 Archimedes, y su corona. l. 1. p. 14.  
 Arithmetica. l. 1. p. 1.  
 Arte analytica. l. 3. p. 1.  
 Artificio, que hay de mirar en el aumento, o disminucion de sus obras. l. 4. p. 17.  
 Artificio nuevo. l. 1. p. 10.  
 Aspectos de las cosas. l. 1. p. 143.  
 Aumentar, o disminuir las figuras regulares. l. 4. p. 124.  
 Aumentar, o disminuir los cuerpos regulares. l. 4. p. 136.

**B**  
 Binomios, y residuos. l. 3. p. 104.  
 Binomios, y sus raizes. l. 3. p. 107.

**C**  
 Canto. l. 1. p. 1.

**C**orona de Archimedes. l. 1. p. 14.  
 Cubo. l. 2. p. 4.  
 Cuentas, o numeracion. l. 1. p. 2.  
 Cuentas Arithmeticas. l. 1. p. 5. p. 138.

**D**  
 Decimas, y sus reglas. l. 1. p. 36.  
 Su aplicacion. y uso. l. 1. p. 55.  
 Denominador del quebrado. l. 1. p. 24.  
 Depression de caracteres. l. 3. p. 124.  
 Disminuir las figuras. l. 4. p. 124.  
 Disminuir los cuerpos. l. 4. p. 136.  
 Disposiciones de proporcion. l. 1. p. 118.  
 Doradores, y Pintores. l. 4. p. 138.

**E**  
 Elecciones, y pozos. l. 1. p. 184.  
 Elecciones. l. 1. p. 126.  
 Enigmas, todo el libro. quarto.  
 Esfera inscrita, o circumscripita en los cuerpos. l. 4. p. 126.  
 Esquadrón, su proporcion. l. 1. p. 47.  
 Exponente de decimas. l. 1. p. 50.  
 Exponente de caracteres. l. 1. p. 4.

FIGURA 8. «Tabla de los capitulos» i «Índice del libro».  
 FONT: Zaragoza, 1669: 449-455.

### Reflexions finals

En l'anàlisi de l'*Arithmetica universal* (1669) de Saragossà hem detectat evidències que fan palès que aquesta obra adapta idees i fonaments de l'obra *In artem analyticem isagoge* (1591) de Viète. Tot el procediment analític que descriu i aplica Saragossà en els seus problemes reflecteix la visió de Viète i la seva àlgebra especiosa. L'*Arithmetica* resulta original en relació amb la classificació de les matemàtiques i, en particular, de l'aritmètica, que és universal. Saragossà tracta en primer lloc l'«arte menor» i a continuació l'«arte maior» (diferent de l'art major del segle XVI), i reserva el terme *àlgebra* per referir-se a l'art analític de Viète.

Darrere d'aquesta proposta d'organització de l'aritmètica, la intenció didàctica de Saragossà té un paper crucial. Al llarg d'aquest article hem presentat diversos exemples que il·lustren el seu desig de transmissió del coneixement: l'índex, la taula de continguts i la taula explicativa dels caràcters, que es presenten al final de l'obra. Així mateix, la introducció de l'*Arithmetica* està escrita seguint aquest objectiu didàctic que emmarca l'obra. L'autor utilitza diferents apartats de la introducció per orientar i guiar el lector durant l'estudi del seu llibre i, amb instruccions clares, per transmetre una metodologia d'estudi molt concreta: treballar en un ordre establert, practicar amb exemples senzills i evolucionar cap a problemes més complexos.

Pel que fa al significat de l'obra no podem oblidar que ell és jesuïta. La seva tasca docent al Col·legi Imperial i altres centres jesuïtes ens fan preguntar si amb aquesta obra Saragossà pot haver contribuït a la difusió de l'art analític de Viète a Espanya. És per tot plegat que resulta innegable que el seu intent de desenvolupar una metodologia pròpia en l'àlgebra mereix ser reconegut com un referent de les matemàtiques espanyoles del segle XVII, i una contribució original a la història de l'àlgebra espanyola.

## Referències bibliogràfiques

EROLES CRIVILLÉ, A. (2019). *La introducció de l'àlgebra de Viète a Espanya* [en línia]. Treball final de grau. Barcelona: FME, Universitat Politècnica de Catalunya. <<https://upcommons.upc.edu/handle/2117/168366>> [Consulta: 9 maig 2021].

EROLES CRIVILLÉ, A.; MASSA-ESTEVE, M. R.; BLANCO ABELLÁN, M. (2019). «Fonts vietianes a l'*Arithmetica universal* (1669) de Josep Saragossà». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, vol. xvii, p. 1-38.

NAVARRO BROTONS, V. (1996). «Los jesuitas y la renovación científica en la España del siglo xvii». *Studia Historica*, 14, p. 15-44.

RECASENS GALLART, E. (2010). «Zaragoza i Vilanova, José (1627-1674)». A: divulgaMAT. *Biografías de matemáticos ilustres* [en línia]. Real Sociedad Matemática Española. <[http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com\\_content&view=article&id=10498:zaragoza-i-vilanova-jose-1627-1674&catid=45:biograf-de-matemcos-espas&Itemid=33](http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10498:zaragoza-i-vilanova-jose-1627-1674&catid=45:biograf-de-matemcos-espas&Itemid=33)> [Consulta: 15 juny 2021].

ZARAGOZA, J. (1669). *Arithmetica universal que comprehende el arte menor y maior, algebra vulgar y espectral*. València: Geronimo Vilagrasa.

## LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE *FUNCIÓN* EN LOS TRATADOS DE BENITO BAILS (1731-1797)

**DOMINGO MARTÍNEZ-VERDÚ;<sup>1</sup> M. ROSA MASSA-ESTEVE<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA.

<sup>2</sup> CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Palabras clave: *didáctica, concepto de función, enseñanza de las matemáticas, Benito Bails, Leonhard Euler, España en el siglo XVIII*

### The teaching of the *function* concept in the treatises of Benito Bails (1731-1797)

Summary: *The formulation of the general function concept was both a significant change in the development of calculus and an added impetus to its "de-geometrisation". As a result of the publication in 1748 of the two volumes of Introductio in Analysin Infinitorum by Leonhard Euler (1707-1783) and their dissemination, the function concept took on a central role in analysis. This paper reflects on the didactic way in which Bails also introduced the function concept in 18th-century Spain in his courses devoted to mathematics teaching, with definitions similar to Euler's.*

Key words: *didactics, function concept, mathematics teaching, Benito Bails, Leonhard Euler, 18th-century Spain*

### Introducción

La creación del concepto general de *función* supuso tanto un gran cambio en los fundamentos del cálculo como un impulso añadido a su «desgeometrización». Se fue reemplazando en el cálculo el uso de las *cantidades geométricas variables* por el de las *funciones*, aunque consideradas como «expresiones analíticas» o fórmulas (Bos, 1984; Kleiner, 1989; Youschkevitch, 1976). Uno de los pasos importantes en la materialización de esta tendencia se produjo con la publicación, en 1748, de los dos volúmenes de la obra *Introductio in analysin infinitorum* (en adelante *Introductio*) de Leonhard Euler (1707-1783).

Desde la Antigüedad se encuentran tablas o correspondencias utilizadas para localizar, por ejemplo, cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas, o también tablas, usadas en cálculos astronómicos y trigonométricos, que ahora se pueden interpretar como una noción intuitiva de la idea de *función* basada en sucesiones numéricas. Desde finales del siglo xvi hasta mediados del siglo xvii, el proceso de creación de un lenguaje simbólico y el uso de procedimientos analíticos introducidos por François Viète (1540-1603), Pierre Hérigone (1580-1643) y desarrollados por René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), para solucionar problemas geométricos, proporcionaron una herramienta algebraica en la creación del concepto de *función*.

La palabra *función* la encontramos en un manuscrito de 1673, *De functionibus plagulae quattuor* (Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe*,<sup>1</sup> serie vii, volumen iv: 500, 504, etc.) de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Y el mismo término se presentó más tarde impreso en unos pocos artículos que Leibniz publicó en 1692 y 1694 (*Nova calculi differentialis applicatio et usus*, 1694, Leibniz, 1849-1863, v: 306). En ellos, se asociaba *función* a objetos geométricos como abscisas, ordenadas, tangentes, etc. Posteriormente, fue Johann Bernoulli (1667-1748) quien definió explícitamente qué debía entenderse por *función* en un artículo publicado en 1718 (se recoge en su *Opera omnia*, Bernoulli, 1742, ii: 241), dedicado a la solución del problema isoperimétrico (Struik, 1986). Finalmente, con la obra *Introductio* de Euler, alumno de Bernoulli, el concepto de *función* fue adquiriendo un papel central en el análisis.

En España, el concepto de *función* fue introducido por Benito Bails (1731-1797) en su obra *Elementos de matemática* en 1779. Bails estudió matemáticas y teología en la Universidad de Toulouse (Francia), y en 1755 se trasladó a París donde trabó amistad con D'Alembert y Condorcet, con los que colaboró en el *Journal Historique et Politique*. Bails fue secretario del embajador de España, y regresó con él a Madrid en 1761. Posteriormente fue nombrado director de Matemáticas de la Real Academia de las Bellas Artes de San Fernando (RABASF) de Madrid en 1768. Por encargo de dicha academia elaboró dos cursos de matemáticas: *Elementos de matemática* (Madrid, 1779-1802) y *Principios de matemática* (Madrid, 1776). *Elementos de matemática* es una obra de carácter científico enciclopédico compuesta de once tomos en trece volúmenes (1779-1802),<sup>2</sup> que abarca en los tres primeros tomos la matemática pura, y en el resto de volúmenes trata de la matemática mixta. Un compendio de los *Elementos* dio lugar a otra obra en tres tomos: *Principios de matemática*. En la segunda edición de esta última (1789, tomo ii), Bails también introducía el concepto de *función*.

El objetivo de esta comunicación es reflexionar sobre el enfoque didáctico con el que Bails introdujo el concepto de *función* en la España del siglo xviii, usando Euler y la teoría de las proporciones para mostrar cómo se pueden utilizar estas fuentes en la enseñanza de este concepto.

En una primera parte, se analizará el concepto de *función* en Euler y en Bails, según se define en las dos obras de Euler citadas por Bails: *Liber primus de Introductio in analysin infinitorum* (1748),<sup>3</sup> e

1. *Sämtliche Schriften und Briefe* ('Todos los escritos y cartas'), editado en Darmstadt, Leipzig y Berlín por la Academia de Ciencias de Berlín, series i-viii. El primer volumen se publicó en 1923.

2. Sobre Bails y su obra véase Martínez-Verdú (2017). En 1791, Bails fue detenido por la Inquisición y desterrado a Granada, desde donde regresó al año siguiente a su casa en Madrid, en la que permaneció hasta su fallecimiento el 12 de julio de 1797.

3. Véase cita 19 de Bails (1779, ii: xv): «*Introductio in Analysin infinitorum*. Auctore Leonardo Eulero, Professore Regio Berolinensi, &c. Academia Imperiaali Scientiarum Petropolitane Socio, Lausana, 1748.»

*Institutiones calculi differentialis* (1755)<sup>4</sup> (en adelante *Institutiones*). En una segunda parte, se analizará con un enfoque didáctico cómo Bails algebriza la teoría de las proporciones usando las ecuaciones y a partir de las ecuaciones introduce las funciones. Esta segunda parte es la que se propone para su uso en el aula.

### El concepto de *función* en Euler y en Bails

En la *Introductio* (1748) de Euler el concepto de *función* está asociado al término *expresión analítica*. Por el contrario, en las *Institutiones* (1755) se hace una interpretación de función en la que Euler explicita la *dependencia* entre cantidades variables.

La primera definición, en orden cronológico, del concepto de *función* en Euler se encuentra en el punto 4 de la *Introductio* (véase fig. 1). Y aún añade Euler en el punto 5 que la función también es una cantidad variable.

4. Función de una cantidad variable es una expresión analítica comoquiera compuesta de esa cantidad variable, y números o cantidades constantes. (Euler, 1748, I: 4)<sup>5</sup>

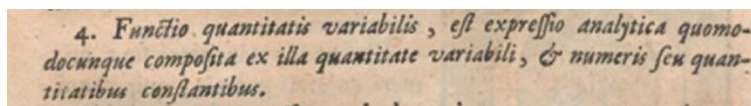


FIGURA 1. Definición de *función* según Euler.  
FUENTE: Euler, 1748: 4.

Más tarde, Bails, en la sección titulada «De las series» (Bails, 1779, II, art. 281-428: 317-425) de sus *Elementos*, define de manera similar, en el artículo 282, lo que entiende por *función* de una cantidad variable (véase fig. 2).

**282 Llamamos *funcion* de una cantidad variable a toda expresion analytica, sea la que fuere, compuesta de dicha cantidad y de constantes.**

FIGURA 2. Definición de *función* según Bails.  
FUENTE: Bails, 1779, II: 138.

Euler definió con otra interpretación el concepto de *función* en una obra posterior titulada *Institutiones* (1755). En el prefacio de esta obra, que trata del cálculo diferencial utilizando las ideas de Leibniz, Euler presentó el concepto de *función* como cantidades que pueden ser determinadas por otras, explicitando su dependencia (véase fig. 3).

4. Véase cita 15 de Bails (1779, III: XIV): «*Institutiones Calculi Differentialis cum ejus usu in Analyti finitorum ac doctrina serierum*. Auctore Leonardo Eulero &c. San Petersburgo, 1755.»

5. Aunque existe la traducción realizada por José Luis Arantegui Tamayo para la edición de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) (L. EULER (2000), *Introducción al análisis de los infinitos*, edición a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez, Sevilla, Grafitres, S. L.), hemos modificado algún aspecto.

Las cantidades que dependen unas de otras de este modo, aquellas que experimentan un cambio como consecuencia del cambio de otras, también suelen llamarse funciones de estas cantidades; esta definición se aplica en un sentido muy amplio e incluye todas las maneras en que una cantidad puede ser determinada por otras. (Euler, 1755, I: VI)

*Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant; eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur.*

FIGURA 3. Texto en latín de la definición de *función* de Euler.

FUENTE: Euler, 1755, I: VI.

Bails, como había hecho también Euler, definió en los *Principios*, en la sección «De las funciones» (t. II, art. 368-372: 243-245), la nueva interpretación del concepto de *función*, añadiéndole los términos de *enlace*, *relación* y *dependencia*: «Las cantidades entre las cuales hay este enlace, relacion ó dependencia...», poniendo un ejemplo, y más adelante ya define la función a la manera de Euler (véase fig. 4).

368 [...]

*Pero este término *funcion* tiene un sentido dilatadísimo, y significa todos los modos posibles de determinar una cantidad por medio de otras.*

FIGURA 4. Definición de *función* de Bails.

FUENTE: Bails, 1789, *Principios*, II: 24.

### Una concepción didáctica del concepto de *función* en Bails

En el periodo de 1778 hasta 1780, Bails publicó en tres tomos la segunda edición de los *Principios*. El tomo II (1779) está estructurado en seis secciones bien diferenciadas («Principios de álgebra», «Principios de secciones cónicas», «De las series», «Del cálculo diferencial», «Del cálculo integral» y «Principios de trigonometría esférica»). La tercera sección, «De las series», va precedida por una

243

**DE LAS FUNCIONES.**

368 **E**N las cuestiones que los matemáticos se proponen entran siempre ó quasi siempre

FIGURA 5. Inicio de la sección «De las funciones».

FUENTE: Bails, 1789, II: 243.

breve introducción, titulada «De las funciones», que consta de cinco artículos, el primero de los cuales es el artículo 368 del tomo II (art. 368-372: 243-245), insertados por Bails en esta segunda edición de los *Principios* (véase fig. 5).

### **Etapa 1: Algebrización de la teoría de las proporciones usando las ecuaciones**

Bails se propuso dar a conocer las funciones tomando como punto de partida un ejemplo de teoría de proporciones del tratado de la *Aritmética*. Bails realiza una aportación novedosa en la presentación del concepto de *función*, tendiendo un puente que enlaza la aritmética, el álgebra y el cálculo:

[...] se llaman funciones unas de otras, y las daremos á conocer recordando una cuestión resuelta en la *Arismética* (I.180).<sup>6</sup> (Bails, 1789, II: 243)

En este artículo (180: 147) (véase fig. 6), Bails plantea y resuelve una *cuestión* de teoría de proporciones mediante el algoritmo de la regla de tres simple directa.

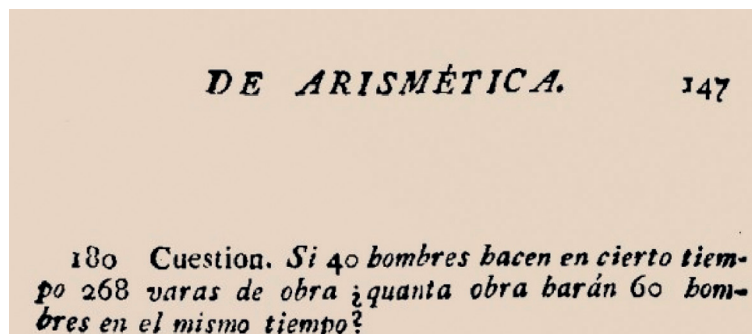


FIGURA 6. Art. 180 del *Tratado de Aritmética*.

FUENTE: Bails, *Principios*, 1788, I: 147.

Para resolver la *cuestión*, Bails plantea primero la proporción con las tres cantidades conocidas a falta de la cuarta proporcional (véase fig. 7).

**Las cantidades de un mismo nombre son aquí 40<sup>h</sup> y 60<sup>h</sup>, y como estos son mas que aquellos, tambien el número de varas que trabajarán será mayor que el número de varas que han trabajado los primeros. Vamos por lo mismo de lo mas á lo mas, esto es de mas hombres á mas varas, por cuyo motivo la regla es directa. Pongo las tres cantidades en proporcion**  
 $40^h : 60^h :: 268^v :$

FIGURA 7. Fragmento del artículo 180 de la *Aritmética*.

FUENTE: Bails, *Principios*, 1788, I: 147.

6. Hay que decir que con la indicación «*Arismética* (I.180)» Bails se está refiriendo a la parte de los «Principios de arismética» que se estudia en el tomo I de sus *Principios*.



Después prosigue explicando cómo simplificar la expresión y se extiende su explicación en el artículo 181 dando instrucciones sobre la forma de abreviar la regla. Tras efectuar varias operaciones aritméticas, llega a una expresión del tipo  $1 : a :: b :$ , que en el caso de la *cuestión* queda la proporción

$$1 : 1,5 :: 268 :$$

Bails pasa después a algebrizar la proporción ( $1 : k :: x^n : y$ ) y la transforma en una ecuación del tipo  $y = kx^n$ , con  $n = 1$  (en notación actual), que proporciona la solución de la *cuestión*:

$$402 = 1,5 \times 268 :$$

### **Etapa 2: Algebrización de la teoría de las ecuaciones con funciones**

Finalizada la algebrización de la proporción con una ecuación (art. 180-181 de la «Aritmética» del tomo I de los *Principios*), Bails continúa con el artículo 368 «De las funciones» («Álgebra», tomo II, *Principios*) y algebriza con una función la ecuación obtenida en la etapa 1. Bails, de forma retórica, explica en términos algebraicos la *función*: «El número de hombres, de cuyos aumentos ó decrementos pende el que crezca o mengue la obra, es una función del número que expresa sus varas» (Bails, *Principios*, 1789, II: 243).

Ahora se escribiría de forma simbólica como:

$$N. \text{ hombres } (h) = \text{función } (n. \text{ varas } (v)) [h=f(v)].$$

Cabe notar que puede intuirse en la conclusión de Bails una relación o dependencia entre el «conjunto» del número de hombres y el «conjunto» del número de varas. Bails no los considera solo números en abstracto, sino números ligados a clases o especies bien diferenciadas.

Se puede trasladar al aula el razonamiento de Bails con el desarrollo de alguna actividad sugerente para el alumno en la que se relacione las proporciones con el concepto moderno de *función* y la teoría de conjuntos. La idea es facilitar la asimilación de conceptos más complejos mediante la algebrización de ideas más básicas con el uso de signos, símbolos y expresiones algebraicas en un proceso de mayor abstracción. Como ejercicio para el aula se sugiere la importancia de poner de relieve la algebrización de las proporciones en ecuaciones, haciendo hincapié previamente, a semejanza de Bails, en que el alumno debe saber convenientemente qué representan y qué lugar deben ocupar cada una de las cantidades que componen la proporción, con el fin de que se algebrice adecuadamente la proporción usando una ecuación (Bails, 1789, I: 146). Las cuestiones que se pueden plantear al alumno pueden ser del tipo: «Tomando como modelo el problema de regla de tres directa resuelto por Bails, reproducir sus pasos para un problema de regla de tres inversa, plantear la proporción, algebrizarla usando una ecuación y encontrar la función asociada. Identifica las variables independiente y dependiente. Razona si puedes obtener siempre a partir de una proporción una función en su sentido moderno (a cada elemento de un primer conjunto se le asigna un único elemento de un segundo conjunto). Explica si se puede construir geoméricamente la proporción a partir de su algebrización usando una ecuación. Interpreta la construcción geométrica de la solución en términos de función.» Con la geometría se propone dar un aspecto visual intuitivo que complemente el pro-

ceso de abstracción y desarrolle su capacidad de razonamiento, con lo que le permite al alumno relacionar de forma holística la aritmética, el álgebra, el cálculo y la geometría.

### Algunas reflexiones

En 1779, Bails introdujo en su obra enciclopédica de los *Elementos* el concepto moderno de *función* como «expresión analítica», en línea con Euler. En segundo lugar, Bails, en 1789, formula una nueva definición del concepto de *función* en la segunda edición de los *Principios*. Allí ya no tiene cabida el término *expresión analítica*, y la función pasa a ser, como señala Youschkevitch (1976: 69) al referirse a Euler, una «noción general de correspondencia entre pares de elementos». Se trata de una definición más abstracta y general y Bails comparte claramente las ideas de Euler y sus difusores, enriqueciendo el texto de Euler con un lenguaje matemático muy actual usando las palabras *relación* y *enlace* como correlación entre cantidades variables. Tanto Euler como Bails sustancian los fundamentos del cálculo en el concepto de *función*.

Bails aportó una definición de *función* que surge de forma natural de la teoría de la proporción. Hasta donde nosotros conocemos, no parece que Bails haya utilizado ningún modelo ni referencia a seguir, ya sea española ya sea europea, en esta interpretación. El concepto de *función* ya no es algo abstracto plasmado en una definición, por el contrario, tiene unas profundas raíces arraigadas en la Antigüedad y, como más tarde interpretará Boyer (1946) en general, se observan tres pasos en la evolución de la idea de *función*: *proporción*, *ecuación* y *función*. Bails con su concepción didáctica de las matemáticas usa este camino para explicar el concepto de *función*. Bails aporta, por tanto, una aproximación a la teoría de la proporción desde un enfoque que va más allá de una igualdad entre dos razones.

Como reflexión final cabe resaltar esencialmente el punto de vista didáctico. La forma en que Bails formula el concepto de *función* podría ser apropiado para su traslado al aula e implicar a los alumnos en un proyecto histórico que abarcara la estrecha relación entre funciones, proporciones y ecuaciones, tal y como se sugiere en una «observación para la enseñanza» que hizo Kleiner.<sup>7</sup>

El hecho de proporcionar una visión global e integrada que relacione diferentes materias como aritmética, álgebra, cálculo y geometría puede aportar al alumno una concepción coherente de las matemáticas que conecta los conocimientos de disciplinas que en ocasiones se enseñan de forma aislada (Herrero *et al.*, 2017; Massa-Esteve, 2020). De esta manera, la historia de la matemática puede contribuir a proporcionar una percepción más amplia del conocimiento matemático, e incentivar la curiosidad del alumno por conocer la conexión entre los conceptos que va aprendiendo, con el propósito de motivarlo a la reflexión.

---

7. «Another interesting historical project, which cuts across several of the above sections, is to consider the following three stages in the evolution of the idea of function: proportion, equation, and function.» (Kleiner, 2012: 128), «Otro proyecto histórico interesante, que abarca varias de las secciones anteriores, es considerar las siguientes tres etapas en la evolución de la idea de función: proporción, ecuación y función.» (La traducción es de los autores.)

## Referencias bibliográficas

- BAILS, B. (1778-1780). *Principios de matemática*. 2ª ed. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra. 3 t.
- (1779-1802). *Elementos de matemática*. Madrid: Imprenta de Joachin Ibarra (Imprenta Vda. de Ibarra, los tomos publicados desde 1787). 11 t.
- BERNOULLI, J. (1742). *Opera omnia*. Tomos I y IV. Lausana y Ginebra: Sumptibus Marci-Michaelis Bousquet & Sociorum.
- BOS, H. J. M. (1984). «Newton, Leibniz y la tradición leibniziana». En: GRATTAN GUINNES, I. (ed.). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica*. Madrid: Alianza, pp. 69-124.
- BOYER, C. B. (1946). «Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept». *Scripta Mathematica*, 12, pp. 5-13.
- EULER, L. (1748). *Introductio in analysis infinitorum*. Lausana: apud Marcum-Michaellem Bousquet & Socios. 2 v.
- (1755). *Institutiones calculi differentialis, cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina rerierum*. San Petersburgo: Impensis Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae. 2 v.
- (2000). *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición a cargo de A. y F. Pérez. Traducción de José Luis Arantegui Tamayo. Sevilla: Grafitres, S. L.
- HERRERO, P. J.; LINERO, A.; MELLADO, A. (2017). «Algunos métodos de resolución numérica de ecuaciones del siglo XVI y su aplicación al aula de secundaria». En: GRAPI, P.; MASSA-ESTEVE, M. R. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, pp. 41-48.
- KLEINER, I. (1989). «Evolution of the function concept: A brief survey». *The College Mathematics Journal*, 20, 4, pp. 282-300.
- (2012). *Excursions in the history of mathematics*. Nueva York: Springer.
- LEIBNIZ, G. W. (1849-1863). *Mathematische Schriften*. Edición a cargo de C. I. Gerhardt. Londres: D. Natt; Berlín: A. Asher; Halle: H. W. Schmidt. 7 v. [Reeditado en 1989 por Hildesheim, Olms]
- MARTÍNEZ-VERDÚ, D. (2017). «La concepción didáctico-cognitiva de la enseñanza de las matemáticas en Benito Bails (1731-1797)». En: GRAPI, P.; MASSA-ESTEVE, M. R. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, 115-128. DOI 10.2436/10.2006.03.15.
- MASSA-ESTEVE, M. R. (2020). «The algebraization of mathematics: Using original sources for learning mathematics». *Teaching Innovations*, 33, 1, pp. 21-35.
- STROIJK, D. J. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. (1976). «The concept of function up to the middle of the 19th century». *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 1, pp. 37-85.

## ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE EL BENEFICIO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ACTIVIDAD DOCENTE E INVESTIGADORA

**PEDRO JOSÉ HERRERO PIÑEYRO;<sup>1</sup> ANTONIO LINERO BAS;<sup>2</sup> ANTONIO MELLADO ROMERO<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> IES RICARDO ORTEGA, FUENTE ÁLAMO (MURCIA).

<sup>2</sup> DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE MURCIA.

<sup>3</sup> IES FRANCISCO SALZILLO, ALCANTARILLA (MURCIA).

Palabras clave: *beneficio de la historia de las matemáticas, docencia, investigación, actividades para el aula*

### **Some remarks on the benefits of the history of mathematics in both teaching and research activity**

Summary: *In this paper, we make some remarks about the use and benefits of the history of mathematics both in our teaching activity in secondary school and in teacher training courses, and in our research in pure mathematics. In the sphere of secondary school, we present some ideas on the performance of activities involving the extraction of  $n$ -roots of positive integers from the reading of Viète's work De Numerosa Potestatum. We also highlight the significance of the history of mathematics for the acquisition of a comprehensive understanding of the evolution of different aspects of this discipline and we briefly describe the path followed by Apollonius's theorem, connecting different branches of mathematics. Lastly, we illustrate the benefits of the history of mathematics in relation to our research efforts by showing how to make appropriate use of a certain inequality in a problem of discrete dynamical systems.*

Key words: *benefits of the history of mathematics, teaching, research, classroom activities*

### **Introducción**

En estas notas pretendemos reflexionar sobre los beneficios que reporta el estudio de la historia de las matemáticas, tanto en el ámbito de las enseñanzas media y universitaria como en la labor de investigación para la generación de nuevos co-

nocimientos en los distintos campos de las matemáticas. Abordamos esta tarea desde tres puntos de vista, con los siguientes objetivos: desde la perspectiva de la enseñanza media, para hacer atractiva la presentación de diferentes temas mediante materiales con actividades para el aula; en la formación de futuros docentes, haciendo ver la utilidad de la historia para, entre otros, contextualizar los temas y dar una visión unificadora de las matemáticas; desde el punto de vista de la investigación en matemáticas, comentaremos su importancia para, a través de la lectura de autores antiguos, obtener la inspiración para resolver un problema o plantear nuevas cuestiones.

En cada parte, apuntaremos una serie de reflexiones generales sobre la utilidad de la historia de las matemáticas. Además, en los tres casos trataremos de ejemplificarlas a través de situaciones concretas. A continuación, las esbozamos someramente.

En la etapa de enseñanza media, veremos cómo la lectura de textos originales nos puede llevar a elaborar materiales para el aula. Así se hizo en (Herrero *et al.*, 2017), en donde preparamos una serie de actividades basadas en métodos numéricos de resolución de ecuaciones del siglo XVI. Ahora, partiendo de la lectura de *De numerosa potestatum* (1600) de François Viète (1540-1603), planteamos una serie de actividades para el aula de secundaria sobre el tema de cálculo y aproximación de raíces enésimas.

En relación con la enseñanza universitaria, en ocasiones necesitamos despejar dudas sobre el recorrido histórico de un tema o un resultado concretos. Este es el caso de una generalización del teorema de Apolonio que se presenta como original en Amir-Moez y Hamilton (1976), mientras que en Recasens (2008) nos queda claro que dicho resultado ya era conocido por Leonhard Euler (1707-1783), véase Euler (1750), e incluso por José Zaragoza (1627-1679), véase Zaragoza (1674).

Finalmente, en la labor investigadora, la lectura de textos de otras épocas nos puede inspirar a veces para abordar la demostración de un resultado. Lo ilustraremos con Linero y Soler (2020), un trabajo de investigación en el ámbito de los sistemas dinámicos discretos, en donde se precisa comparar el tamaño de las columnas de una sucesión de matrices  $10 \times 10$ , lo que se consigue en parte gracias a elementos de geometría clásica. Todo ello por la inspiración de la lectura de los *Elementos* de Euclides en la versión presentada por Pierre Hérigone (1580-1643), véase Hérigone, 1634, tomo I.

### **Materiales para el aula: aproximación de raíces enésimas**

En la etapa obligatoria de secundaria, el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos suele verse frenado por diferentes factores. A la inherente dificultad epistemológica al introducir los conceptos, hemos de añadir la desazón que se genera en los estudiantes con la presentación súbita de los temas, sin contextualizar y asimilados mediante la repetición, a veces tediosa, de ejercicios que siguen unos patrones muy marcados. Estos obstáculos metodológicos hacen en general crecer en el alumnado un sentimiento de desinterés, de falta de confianza y de control, e incluso de impotencia, a la hora de asimilar la asignatura. En este sentido, pensamos que la historia de las matemáticas puede ser una herramienta pedagógica muy interesante para proporcionar un enriquecimiento sustancial en el proceso de enseñanza y aprendizaje, nos puede servir para intentar hacer atractivos los temas, para motivar al alumnado, dando sentido y contextualizando cada una de sus partes, todo ello con el objetivo de que perciban la transmisión de las matemáticas como una ciencia construida mediante un trabajo colectivo y en continua evolución (Massa-Esteve, 2014). Además, el uso de fuentes originales nos permitirá elaborar materiales que rompan con la monotonía tradicional, que supongan la realización de actividades no repetitivas en las que el alumno potencie su creatividad y adopte

estrategias no estándares para su resolución. Intentaremos presentar tareas enriquecedoras, en la búsqueda de una formación completa del alumnado.

En esta sección vamos a incidir en la cuestión de la resolución numérica de raíces enésimas. Recomendamos Cajori (1910) como introducción al tema, puede consultarse también Barrow-Green *et al.* (2019). Si queremos contextualizar históricamente el tema, en primer lugar debemos decir que la extracción de raíces cuadradas y cúbicas aparece ya como asunto de valor práctico indudable en las civilizaciones babilónica y egipcia. Lo encontramos en la civilización griega, tanto bajo el tamiz geométrico de los *Elementos* de Euclides como el aritmético en Arquímedes (c. 272-212 a. C.) o en Herón de Alejandría (10-70 d. C.). La universalidad del problema de aproximar raíces cuadradas y cúbicas hace que aparezca en diferentes culturas, aparte de la occidental, como en las culturas china e hindú. Siguiendo con este trazado somero de la historia de la aproximación de raíces enésimas, podemos citar también a Leonardo de Pisa (c. 1170 - c. 1250), quien en su *Liber abaci* nos muestra en el capítulo XIV cómo proceder con la extracción de raíces cuadradas y cúbicas. Ya durante el siglo XVI encontramos diferentes textos de aritmética donde hayamos la resolución de raíces cuadradas, tanto exactas como aproximadas, siguiendo la línea directriz de los *Elementos* de Euclides,<sup>1</sup> y la extracción de raíces de mayor potencia a través de un procedimiento numérico basado en lo que hoy denominamos *binomio de Newton*. Todas estas ideas y procedimientos desembocarán de manera magistral en la obra *De numerosa potestatum* (1600-1646) de Viète.

La primera publicación de la obra se realizó a cargo de Marino Ghetaldi (1568-1626) en 1600 (Viète, 1600). En 1646 se volvió a publicar una nueva versión de este trabajo, dentro de la *Opera mathematica* de Viète (1646), editada por Frans van Schooten (1615-1660), también en latín. Existe una traducción al inglés, aunque incompleta (Viète, 1983).

La obra se divide en tres partes: «De numerosa potestatum purarum resolutione» (Viète, 1600: f. 2-6; Viète, 1646: 163-172), donde Viète resolvió numéricamente las *ecuaciones puras*, de la forma  $x^n = a$ ; «De numerosa potestatum adfectarum resolutione» (Viète, 1600: f. 7-34; Viète, 1646: 173-223), donde resolvió numéricamente ecuaciones con términos diferentes al de grado mayor y al término independiente (a este tipo de ecuaciones las llamará *afectadas*), aplicando el método usado en la extracción de las ecuaciones puras, y por último «Consectarium generale ad analysim potestatum adfectarum, et praeceptorum quae ad eam pertinent, recollectio» (Viète, 1600: f. 34-36; Viète, 1646: 224-228), con un resumen de consecuencias generales del análisis efectuado y una enumeración de preceptos que se deben tener en cuenta en la resolución de ecuaciones.

En cuanto a las ecuaciones puras, Viète plantea la resolución de cinco problemas, problemas I-V, desde la raíz cuadrada hasta la sexta:

$x^2 = 2916$ ;  $x^3 = 157464$ ;  $x^4 = 3311776$ ;  $x^5 = 7962624$ ;  $x^6 = 191102976$ . En la notación de Viète: I Q  $\alpha$ quari 29,16; IC  $\alpha$ quari 157, 464; I QQ  $\alpha$ quari 331,776; I QC  $\alpha$ quari 7,962,624; I CC  $\alpha$ quari 191,102,976, respectivamente.

1. Así, Pérez de Moya (c. 1512-1596), en su *Arithmetica practica y speculativa*, 1562, cuando trata la raíz cuadrada de 52417, nos comenta: «Y asi diras, que la rayz de 52 es 7 y sobran 3. Prosigue para sacar la rayz de los 3 que sobaron, y de los 4 que están entre los dos puntos, lo qual haras doblando los 7 que te han venido por rayz. Como muestra Euclides en la quarta del segundo...» (p. 457).

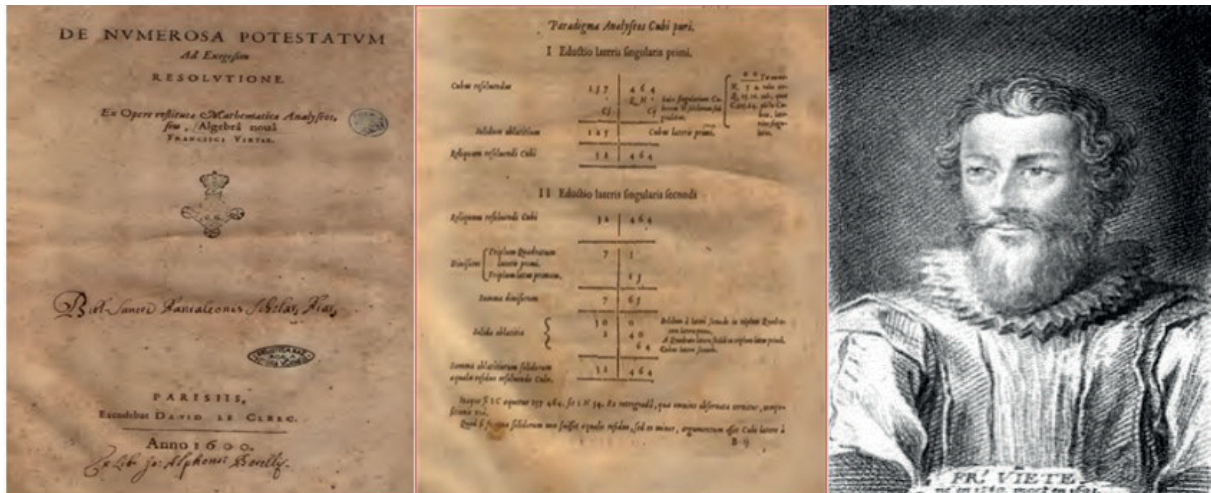


FIGURA 1. Portada de *De Numerosa Potestatum* (Viète, 1600); tablas para extraer la raíz cúbica de 157464 (Viète, 1600); imagen de Viète.

FUENTE: [https://en.wikipedia.org/wiki/François\\_Viète](https://en.wikipedia.org/wiki/François_Viète).

La resolución de estas raíces (todas ellas exactas) se lleva a cabo a través de unas ingeniosas tablas, originales de Viète, en las que se va apoyando para, a través del desarrollo de la potencia de un binomio, ir obteniendo sus soluciones.

En relación con la aproximación numérica de raíces, en el precepto 9 que antecede a la resolución de las ecuaciones puras, Viète propone aproximar por exceso y por defecto las raíces, y afirma (véase la figura 2 para el texto en latín):

(9)

Pero si, aunque fuera menor, no quedaran puntos sobrantes, entonces es claro que la raíz es irracional. A la raíz completa que hemos obtenido le añadiremos una fracción cuyo numerador es el resto que nos queda por resolver del término inicial, y cuyo denominador será el divisor que obtendríamos si se añadiera otro punto al término a resolver. Esta fracción añadida a la raíz completa (ya obtenida) da una solución mayor que la verdadera. Si en la segunda potencia, el denominador es aumentado en uno, nos da una raíz más pequeña que la verdadera. La raíz está implícitamente entre estos divisores. (Traducción propia de los autores.)

**Quod si dum cedunt non superint aliquod additum Potestati punctum, argumentum est magnitudinis resoluendæ latus esse irrationale. Collecto itaque lateri adiungitur fragmentum cuius numerator est numerus è magnitudine resolutâ reliquus. Diuisores iidem, qui essent si aliquod punctum Potestati additum superesset resoluendum, & tale fragmentum singularium laterum summæ adiunctum facit latus Potestatis resolutæ maius vero. Et si denominatori addatur unitas, facit latus minus vero. In diuisoribus enim inest implicite latus, quod alioqui proximè esset eliciendum, vt pote productâ per numerâles circulos eâ que resoluitur, Potestate, & continuato opere. At illud constat necesse est intra denarij metam, alioquin ritè non fuit operatum.**

FIGURA 2. Precepto noveno de *De numerosa potestatum*.

FUENTE: Viète, 1600: f. 2v.

Es decir, en términos actuales, para aproximar  $n\sqrt{A^n + R}$ , se nos propone:

Raíz entera +  $\frac{\text{Resto}}{\text{Divisor} + 1} < \text{Solución} < \text{Raíz entera} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}$ , esto es,  $A + \frac{R}{d + 1} < \text{Solución} < A + \frac{R}{d}$ , en donde el divisor  $d$  es  $2A$  (raíz cuadrada),  $3A^2 + 3A$  (raíz cúbica),  $4A^3 + 6A^2 + 4A$  (raíz cuarta), etcétera.<sup>2</sup> Digamos que el precepto 9 es correcto para la aproximación de raíces cuadradas, pero deja de ser cierto en algunos casos cuando el índice de la raíz buscada es mayor o igual que 3.

En la edición de 1600, tras obtener en el problema III 24 como raíz cuarta de 331776, Viète pasa a estimar el valor de  $\sqrt[4]{20000}$  y nos da las aproximaciones  $11 + \frac{5359}{6095}$  y  $11 + \frac{5359}{6094}$  (véase la figura 3), como consecuencia de aplicar el precepto 9, teniendo en cuenta que  $20000 = 11^4 + 5359 = A^4 + R$  y que, en este caso, el divisor es  $d = (A + 1)^4 - A^4 - 1 = 4A^3 + 6A^2 + 4A = 6094$ . Además, el texto nos da una nueva aproximación,  $11 + \frac{10718}{12189}$ , que corresponde a emplear la desigualdad  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ , cuando  $a, b, c, d$  son cantidades positivas dadas tales que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ .<sup>3</sup>

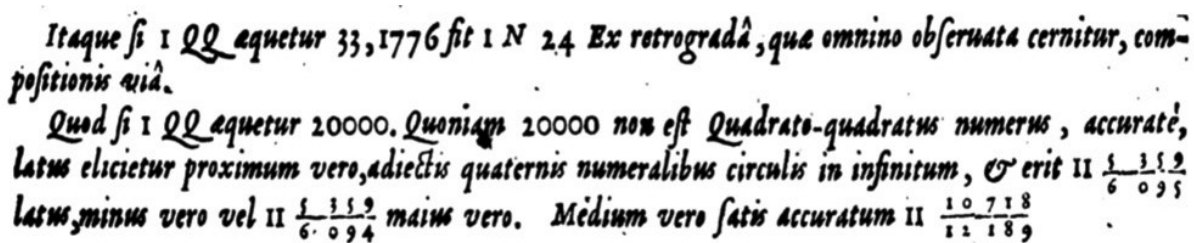


FIGURA 3. Aproximación de  $\sqrt[4]{20000}$ .

FUENTE: Viète, 1600: f. 5.

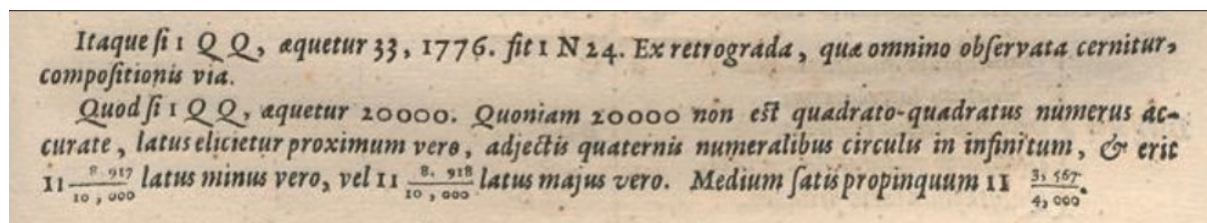
Recordemos que el precepto 9 propugna que  $\sqrt[4]{20000}$  queda comprendida entre las fraccio-  
 nes  $A + \frac{R}{\text{Divisor} + 1}$  y  $A + \frac{R}{\text{Divisor}}$ . Si realizamos las comprobaciones pertinentes,  $11 + \frac{5359}{6095} < 11 + \frac{5359}{6094} < \sqrt[4]{20000}$ , es decir, las dos aproximaciones obtenidas lo son, en realidad, por defecto, y la  
 solución intermedia  $11 + \frac{10718}{12189}$  tampoco mejora la aproximación.

En la edición de 1646 de Van Schooten (Viète, 1646), el precepto 9 se mantiene igual, pero al  
 aproximar  $\sqrt[4]{20000}$  encontramos una diferencia en la redacción del texto: tras añadir grupos de  
 ceros, como en Viète (1600), aproxima por defecto y por exceso de este modo:  $11 + \frac{8917}{10000} < 11 + \frac{8918}{10000}$  (véase la figura 4). No obstante, ambas siguen siendo aproximaciones por defecto.

2. Observemos que el divisor  $d$  es justamente  $d = (A+1)^n - A^n - 1$ .

3. Nicolas Chuquet (1445-1488) comenta en su obra *Triparty en la science des nombres* (1484) que a él se debe la invención y aplicación de esta desigualdad (en adelante, la llamaremos *regla de Chuquet*). El lector interesado en conocer más detalles puede consultar Herrero et al. (2017).



FIGURA 4. Aproximación de  $\sqrt[4]{20000}$ .

FUENTE: Viète, 1646: f. 169.

El valor  $11 + \frac{8917}{10000}$ , por defecto, se ha obtenido añadiendo grupos cuaternarios de ceros (0000, 0000...), pero no se nos indica cómo se ha procedido a dar la aproximación final, seguramente truncando simplemente la cadena de grupos en algún momento. Intuimos también que la idea de aproximar por exceso consiste ahora en añadir una unidad a la última cifra obtenida. Pero el valor presentado,  $11 + \frac{8917}{10000}$ , sigue siendo una aproximación por defecto. Como en Viète (1600), se aplica la regla de Chuquet para obtener un valor intermedio,  $\frac{8917 + 8918}{10000 + 10000} = \frac{3567}{4000}$ . En esta nueva edición de *De numerosa potestatum*, no se menciona el porqué del pequeño cambio que hay en el texto. En la literatura, hasta donde nosotros sabemos, no hemos encontrado mención alguna a este cambio; de hecho, en la traducción con comentarios y notas de Witmer (Viète, 1983) ni siquiera se traducen los problemas III y IV, tan solo se indica que su tratamiento es análogo a los problemas anteriores.

A la hora de preparar actividades para el aula, digamos que en el currículo de las matemáticas de secundaria y bachillerato (decretos 220/2015 y 221/2015), el tratamiento de las raíces lo encontramos dentro de todos los cursos de la ESO. En el primer ciclo aparece el contenido «Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas»; se plantea el concepto de *raíz cuadrada* y se aproxima su valor mediante tanteo, a través de sucesiones que aproximan por exceso y defecto su valor, quedándonos con la última estimación. En el segundo ciclo, se pasa a un tratamiento básicamente operativo, acentuando su relación con potencias de exponente racional, pero se obvia por completo el concepto de *aproximación* tratado anteriormente, por cierto con poco detalle, en el primer ciclo. Sin embargo, en 3º de la ESO sigue apareciendo el concepto de *aproximación a la raíz cuadrada* dentro del contenido «Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal», que normalmente no se desarrolla dentro del aula. El escaso bagaje algebraico que el alumno posee en el primer ciclo de la ESO es enriquecido en el segundo ciclo, donde ya se opera con polinomios y se manipulan, con total normalidad, expresiones como las potencias de un binomio. Es en estos dos cursos donde la extracción de raíces, no solo cuadradas, sino de orden superior, se puede relacionar con la potencia de un binomio para diseñar algoritmos que nos permiten obtener la aproximación decimal de dichas raíces.

Con todo lo anterior, a modo de ilustración, algunas propuestas de actividades para el aula podrían ser:

1) Desarrollar el contexto histórico: indagar otras aproximaciones a lo largo de la historia para raíces cuadradas y cúbicas (tablas babilónicas, Herón, cultura china...), tomando como punto de partida Cajori (1910) y Barrow-Green *et al.* (2019); búsqueda del personaje, Viète (vida, obras, época...).

2) Para ilustrar las expresiones retóricas y la notación cosista, expresar con esa notación ecuaciones para raíces cuartas, sextas, octavas... Además, para  $n = 2,3$  sería muy conveniente que el alumno ligase el análisis numérico con el significado geométrico de las raíces cuadradas y cúbicas.

3) Formación de tablas para el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas. Explicar razonadamente la tabla que usamos para extraer raíces cuadradas.

4) Manejo de desigualdades elementales para comprobar que la aproximación  $A + \frac{R}{d+1}$  es siempre menor que la raíz buscada (al menos, comprobarlo para raíces cuadradas y cúbicas; se requiere el uso del binomio de Newton).

5) Desarrollar en clase la aproximación de  $\sqrt{2}$  dada por Viète al final del problema I; además, desarrollar el problema III: ajustar los valores de  $A$ ,  $d$  y  $R$  al caso de  $\sqrt[4]{20000}$  y comprobar que la aproximación  $A + \frac{R}{d}$  no lo es por exceso.

6) Uso de programas matemáticos de acceso libre (Maxima, Python...): programar un algoritmo que nos indique cuántos (y qué) valores del resto  $R$  nos proporcionan una aproximación  $A + \frac{R}{d}$  por exceso de la raíz cúbica de  $A^3 + R$ .

### Despejando dudas históricas

Cuando pensamos en la historia de las matemáticas, muchas veces nos vemos tentados en nuestra labor docente a usar alguna anécdota, más o menos contrastada, para atraer la atención de nuestra audiencia. Pero no debemos conformarnos con un acopio de anécdotas, de acontecimientos más o menos plausibles alrededor de un tema o de un personaje, más bien debemos ir más allá e inclinarnos por construir una cultura histórica sólida para fortalecer nuestros conocimientos. Esto implica en todos los casos buscar siempre rigurosidad en nuestros desarrollos, en el manejo de datos, en el análisis y comparación de los textos que usemos (Ferreirós, 2003). La memoria del pasado hará que comprendamos mejor el encaje de los contenidos desarrollados en clase, en cualquiera de las etapas educativas, y nos pondrá en aviso de la procedencia de un cierto tema y su recorrido hasta nuestros días.

En particular, las observaciones anteriores son pertinentes cuando impartimos clases dentro de un máster de formación para futuros profesores en educación secundaria, en la especialidad de matemáticas. En él, una posibilidad para ofertar la elaboración del trabajo de fin de máster (TFM) consiste en desarrollar una propuesta que se enmarque dentro de la historia de las matemáticas. Creemos que una estructura apropiada puede ser la siguiente: elegir una línea de trabajo en la que tratar o bien un autor, o una época, o incluso un tema matemático concreto; aprovechar la formación matemática del alumno para hacer un desarrollo matemático riguroso de los conceptos y resultados de los que trate su TFM; finalmente, proponer futuras actividades para el aula, basadas en la historia de las matemáticas, ajustadas a la línea de trabajo elegida y al currículo de ESO y bachillerato correspondiente a nuestra comunidad autónoma (decretos 220/2015 y 221/2015).

En la elaboración de una propuesta de TFM en los términos anteriores, si bien debemos destacar la fortaleza de la formación matemática de nuestros alumnos, la mayoría de ellos graduados en Matemáticas, en cambio detectamos carencias en su instrucción en historia de las matemáticas, de modo que nuestra primera tarea como tutores de un TFM o docentes en una asignatura de historia es ha-

cerles reflexionar sobre las ventajas de introducir aspectos históricos en la formación de los alumnos de secundaria, de las que ya hemos hablado en la sección anterior. Y en aras de una correcta utilización de los recursos históricos, nuestros alumnos tutorizados deben ser exigentes con la rigurosidad en los desarrollos y procesos descritos, deben informarse convenientemente del recorrido histórico de un tema, de un resultado matemático, de la autoría de una prueba, etc. Al exigir al estudiante que profundice en las citas y sea riguroso con todas las afirmaciones expuestas, huyendo de la mera anécdota, facilitamos el fortalecimiento de su nivel educativo, tanto histórico como matemático. Además, nos podemos encontrar por el camino con gratas sorpresas.

Para ilustrar este punto, imaginemos que el estudiante de máster se ve requerido a desarrollar propuestas en el aula de secundaria en relación con cuestiones de geometría elemental, en particular, sobre cuadriláteros. Por ejemplo, una mera aplicación del teorema de Pitágoras nos muestra que, en un rectángulo, la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales. La misma propiedad se mantiene para paralelogramos de lados  $a$ ,  $b$  y diagonales  $e$ ,  $d$ , esto es  $2a^2 + 2b^2 = e^2 + d^2$ , conocida como *ley del paralelogramo*. Un alumno de secundaria o bachillerato podría hacer la demostración de este resultado, o bien de nuevo a través del teorema de Pitágoras y una adecuada descomposición del paralelogramo, o bien a través del uso de vectores.

El origen de dicha ley del paralelogramo lo encontramos en la matemática griega. En concreto, en un resultado de Apolonio de Perga (c. 262 - c. 190 a. C.), que establece que para un triángulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  se cumple que  $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$  donde  $m$  es la longitud de la mediana trazada desde el vértice opuesto al lado  $c$ . Es sencillo observar que el teorema de Apolonio es equivalente a la ley del paralelogramo. Este teorema nos ha llegado a través de la obra de Pappus de Alejandría (c. 290-350) (Pappus, 1986).

Siguiendo con el tema, de modo natural surge la pregunta de si es posible generalizar la propiedad de los paralelogramos a un cuadrilátero general. Es decir, si ABCD es un cuadrilátero de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y diagonales  $p$ ,  $q$ , nos preguntamos si se sigue manteniendo la propiedad  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2$ . El alumno podría responder a esta cuestión, de manera negativa, empleando el recurso del *contraejemplo*, diseñando un ejemplo para, digamos, un trapecio rectangular.

Si, en general, un cuadrilátero no satisface la ley del paralelogramo, nos podemos plantear si es posible encontrar otra expresión para la suma de los cuadrados de sus lados. Rastreando en la literatura, mediante repositorios y bases de datos adecuados de matemáticas, podemos encontrar Amir-Moez y Hamilton (1976), en donde se presenta como original<sup>4</sup> la siguiente generalización: si  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  son los vértices de un cuadrilátero, y  $M$ ,  $N$  son los puntos medios de las diagonales  $AC$  y  $BD$ , entonces  $(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(MN)^2$ .

Es decir, la suma de los cuadrados de los lados del cuadrilátero es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales más un término adicional, el cuádruple del cuadrado de la distancia entre los puntos medios de las diagonales.

Debemos indicar que la prueba en Amir-Moez y Hamilton (1976) es meramente vectorial, con el mérito de usar elementos básicos de análisis funcional. Pero, ¿no existe ninguna prueba basada en geometría elemental? Indagando en ello, localizamos el trabajo de Recasens (2008), en donde queda

4. Los autores comentan: «We present here a generalization of Apollonius' theorem which makes an interesting geometric application of vector algebra.», p. 89.

claro que la generalización presentada en Amir-Moez y Hamilton ya era conocida mucho antes. En Recasens (2008) nos encontramos una grata sorpresa, ya que podemos leer que Euler había demostrado tal generalización unos doscientos años antes, con elementos puramente geométricos, basados en el uso del teorema de Apolonio (Euler, 1750). Pero no queda ahí la sorpresa: en el mismo trabajo de Recasens se nos muestra que incluso unos setenta y cinco años antes que Euler, por tanto, tres siglos antes de dicha generalización, se había demostrado en Zaragoza (1674). También Zaragoza hace una prueba basada en el teorema de Apolonio, pero diferente a la de Euler, ya que utiliza además su teoría del centro mínimo (Recasens, 2008).

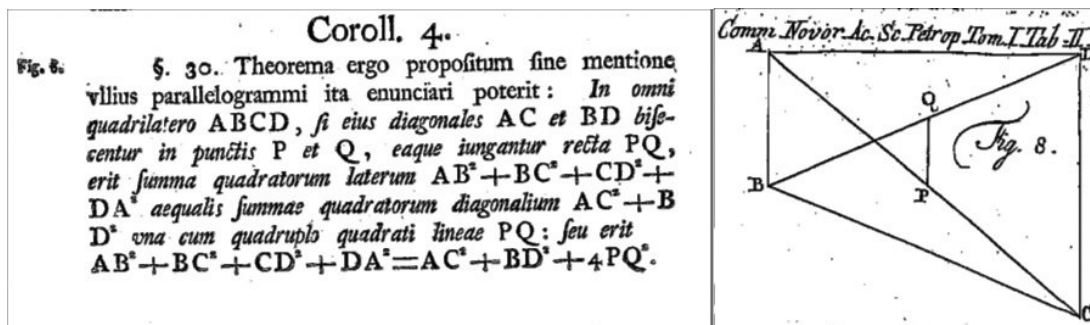


FIGURA 5. La generalización del teorema de Apolonio.  
FUENTE: Euler, 1750.

Hemos visto como la rigurosidad en la búsqueda de fuentes originales nos puede hacer conocer la procedencia histórica de los problemas. Este seguimiento nos hará tener una formación sólida de nuestros conocimientos y seremos capaces, incluso, de buscar conexiones entre diferentes ramas de las matemáticas. De nuevo, por el camino somos capaces de crear nuevas actividades para alumnos de secundaria: de Apolonio a los vectores; contraejemplos para la ley del paralelogramo en cuadriláteros generales; elementos notables de un triángulo (vértices, medianas, puntos medios...). Por último, pero no menos importante, conseguimos que el futuro docente desarrolle su tarea con cierta dosis de deleite personal, suscitando en él y en sus futuros alumnos el resorte imprescindible de la curiosidad en la educación.

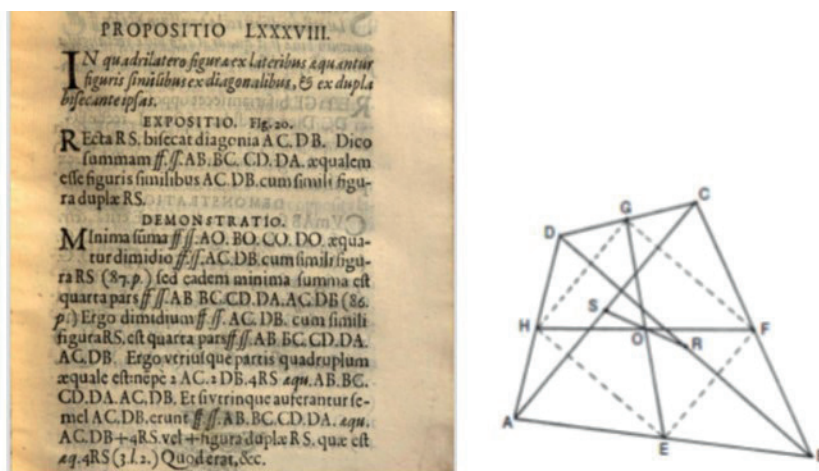


FIGURA 6. Generalización del teorema de Apolonio en Zaragoza (1674); dibujo auxiliar (Recasens, 2008).

### La inspiración en la lectura de textos antiguos

En la tercera parte de este trabajo queremos comentar los beneficios del estudio de la historia de las matemáticas en la investigación matemática, pero no exclusivamente desde el punto de vista del análisis histórico de un tema, sino también como fuente de inspiración para resolver problemas en otros ámbitos de las matemáticas.

Reflexionando sobre el beneficio del conocimiento de la historia en nuestra labor investigadora, el primero que podemos aducir aquí es su capacidad de servir como nexo de unión entre intereses variados, en principio muy dispares entre sí, de servir de contrapeso a la especialización imperante en la investigación en matemáticas. Podemos usarla también para tratar de conseguir una divulgación atractiva de los temas que estudiamos, mediante una introducción que permita a todos los lectores partir de un terreno común, aunque luego las exigencias hagan que el esfuerzo individual se intensifique inevitablemente si queremos ir más allá en nuestras pesquisas. Otra reflexión interesante sobre las bondades del estudio de la historia reside en la conveniencia de la lectura de textos clásicos, como fuente de inspiración para resolver problemas concretos o abrir nuevas vías de investigación. Para ilustrarlo, vamos a ver que una sencilla desigualdad ha desatascado la prueba de un resultado que hemos obtenido dentro del campo de los sistemas dinámicos discretos.

En un sistema dinámico discreto la tarea primordial es averiguar qué le ocurre a largo plazo a la órbita de un punto  $x \in X$ , al conjunto de iteradas del sistema  $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\}$ , o abreviadamente  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$ , para una cierta función  $f : X \rightarrow X$ ; a veces,  $f$  modela el comportamiento de un cierto fenómeno, y cada iterada a través de la ley determinada por  $f$  nos permite averiguar cómo evoluciona el modelo a lo largo del tiempo (discreto)  $n$ . Por ejemplo, si todas las órbitas convergen en un punto fijo, diremos que la dinámica es sencilla: este es el caso de  $f(x) = \frac{1}{2}x$ , con  $x \in X = [0, 1]$ , es sencillo comprobar que la iterada  $n$ -ésima es  $f^n(x) = \frac{1}{2^n}x$ ,  $n \geq 1$ , luego la órbita tiende a 0, que será un punto fijo atractor del sistema, pues  $f(0) = 0$ , y todas las órbitas convergen hacia él; si suponemos que  $f$  modela la densidad de población de una cierta especie, el modelo predice que la población se extingue.

No siempre la dinámica del sistema es tan sencilla como en el ejemplo anterior. Así sucede con las funciones conocidas como IET (del inglés *interval exchange transformation*): hablando vagamente, una  $n$ -IET  $T$  es una aplicación inyectiva  $T : D \subset (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  que trocea el intervalo en  $n$  partes disjuntas y las traslada sobre el cuadrado unidad con una pendiente constante, 1 o  $-1$ . Si la pendiente es negativa, se dice que la IET presenta un *flip* en el trozo correspondiente. En la figura 7 aparece la gráfica de una 6-IET con cuatro *flips*:

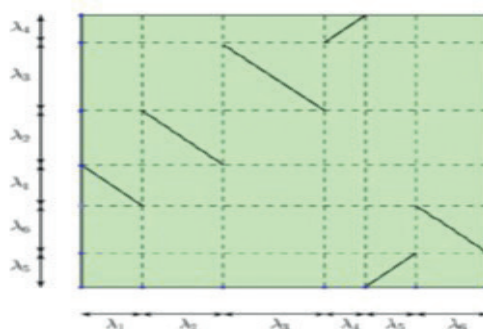


FIGURA 7. Ejemplo de 6-IET con cuatro *flips*.  
FUENTE: Linero y Soler (2018).

Dada una IET con *flips*, queremos averiguar si puede darse el fenómeno de minimalidad, esto es, si todas las órbitas son densas, si visitan todos los entornos abiertos del intervalo (0,1). En Linero y Soler (2018), hemos sido capaces de construir IET minimales  $T$  con *flips*. Después de ese trabajo, nos planteamos otro cierto problema sobre el número de medidas invariantes asociadas a una IET minimal  $T$ . En Linero y Soler (2020), hemos contestado a esta pregunta, en el caso de 10-IET, encontrando IET minimales con *flips* que admiten dos medidas invariantes. Curiosamente, el problema se traduce a una cuestión de álgebra lineal en que hay que averiguar el número de columnas linealmente independientes que tiene un cierto producto de matrices cuadradas de orden  $10 \times 10$  cuando  $n$  tiende a infinito. Para ver el tamaño de la primera matriz,  $M_1$ , redondeamos a una cifra en la mantisa,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{38} & 3 \cdot 10^{38} & 7 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{33} & 3 \cdot 10^{33} & 7 \cdot 10^{30} & 5 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 5 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} \\ 2 \cdot 10^{38} & 2 \cdot 10^{38} & 4 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{33} & 2 \cdot 10^{33} & 4 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} \\ 2 \cdot 10^{37} & 2 \cdot 10^{37} & 4 \cdot 10^{29} & 2 \cdot 10^{32} & 2 \cdot 10^{32} & 4 \cdot 10^{29} & 3 \cdot 10^{29} & 2 \cdot 10^{29} & 3 \cdot 10^{29} & 2 \cdot 10^{29} \\ 5 \cdot 10^{36} & 5 \cdot 10^{36} & 10^{29} & 10^{34} & 10^{34} & 10^{29} & 7 \cdot 10^{28} & 5 \cdot 10^{28} & 7 \cdot 10^{28} & 5 \cdot 10^{28} \\ 7 \cdot 10^{35} & 7 \cdot 10^{35} & 10^{28} & 3 \cdot 10^{31} & 3 \cdot 10^{31} & 10^{28} & 10^{28} & 7 \cdot 10^{27} & 10^{28} & 7 \cdot 10^{27} \\ 10^{38} & 10^{38} & 2 \cdot 10^{30} & 9 \cdot 10^{32} & 9 \cdot 10^{32} & 2 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} & 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} & 10^{30} \\ 2 \cdot 10^{38} & 2 \cdot 10^{38} & 4 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{33} & 2 \cdot 10^{33} & 4 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} \\ 9 \cdot 10^{37} & 9 \cdot 10^{37} & 2 \cdot 10^{30} & 7 \cdot 10^{32} & 7 \cdot 10^{32} & 2 \cdot 10^{30} & 10^{30} & 9 \cdot 10^{29} & 10^{30} & 9 \cdot 10^{29} \\ 2 \cdot 10^{38} & 2 \cdot 10^{38} & 3 \cdot 10^{30} & 10^{33} & 10^{33} & 3 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} & 3 \cdot 10^{30} & 2 \cdot 10^{30} \\ 9 \cdot 10^{38} & 9 \cdot 10^{38} & 2 \cdot 10^{31} & 2 \cdot 10^{34} & 2 \cdot 10^{34} & 2 \cdot 10^{31} & 10^{31} & 9 \cdot 10^{30} & 10^{31} & 9 \cdot 10^{30} \end{pmatrix}$$

Esa primera matriz se va multiplicando (de izquierda a derecha) por  $M(r_2) \cdot M(r_3) \cdot \dots \cdot M(r_n)$ , donde

$$M(r) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2r & 2r + 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r + 2 & r + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & r + 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r + 1 & r + 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4r + 2 & 4r + 6 & 10 & r + 13 & r + 12 & 8 & 4 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y  $(r_n)_n$  es una adecuada sucesión de números naturales que tiende a infinito. Denotamos ese producto de matrices por  $N_n, N_n = M_1 \cdot M(r_2) \cdot M(r_3) \cdot \dots \cdot M(r_n)$ , y la representamos como unión de columnas,  $N_n = (c_1(n) | c_2(n) | \dots | c_{10}(n))$ , donde  $c_l(n)$  indica la  $l$ -ésima columna de la matriz  $N_n$  para  $n > 1$  y  $l \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . Para obtener la siguiente matriz  $N_{n+1}$ , hacemos el producto  $N_{n+1} = N_n \cdot M(r_{n+1})$ . Al intentar averiguar el número de columnas linealmente independientes que se obtiene al considerar el límite de las matrices  $N_n = (c_1(n) | c_2(n) | \dots | c_{10}(n))$ , según las simulaciones numéricas que realizamos, todo hacía indicar que en el límite teníamos solo dos direcciones linealmente independientes (las que se obtienen con las columnas segunda y cuarta, además con un ángulo entre ellas de unos

35 grados sexagesimales) y el resto de columnas tendía a combinaciones lineales de esas dos direcciones. Pero, ¿cómo demostrarlo? ¿De qué manera podíamos comparar la relación en el tamaño entre las diferentes columnas?

En ese momento es cuando hicimos uso de nuestra memoria de la historia matemática. Entre otros argumentos, uno esencial fue el siguiente resultado: si  $a, b, c, d, p, q$  son números reales positivos tales que  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ; además si  $\frac{a}{b} < \frac{p}{q}$  y  $\frac{c}{d} < \frac{p}{q}$ , se sigue también que  $\frac{a+c}{b+d} < \frac{p}{q}$  (y lo mismo sucede si cambiamos el sentido de las desigualdades). ¡Pudimos resolver el problema gracias a una simple aplicación de la regla de Chuquet de la que hablamos en la primera sección de este trabajo!<sup>5</sup>

El uso de las desigualdades anteriores fue consecuencia de tenerlas frescas en la memoria, porque por otra parte, de manera simultánea, estábamos analizando el tomo 1 del *Cursus mathematicus* de Hérigone (1634) para estudiar, entre otros asuntos, la labor de algebrización de las matemáticas de este autor en el siglo XVII, en donde es relevante su traducción con un nuevo lenguaje algebraico de los *Elementos* de Euclides.<sup>6</sup> En el libro V, dedicado a la teoría de proporciones, encontramos esta propiedad dentro de la proposición xxxi (véase la figura 8).

Así, el contacto con textos clásicos puede servir como fuente de inspiración para la resolución de problemas. Aquí, el uso de una sencilla desigualdad ha permitido una salida inesperada a una cuestión en sistemas dinámicos discretos. Destacamos, por tanto, la importancia de la memoria del pasado para servir de inspiración y para comprender mejor nuestro campo de trabajo. Como dijo el matemático francés Henri Poincaré (1908: 930): «Pour prévoir l'avenir des Mathématiques, la vraie méthode est d'en étudier l'histoire et l'état présent.»

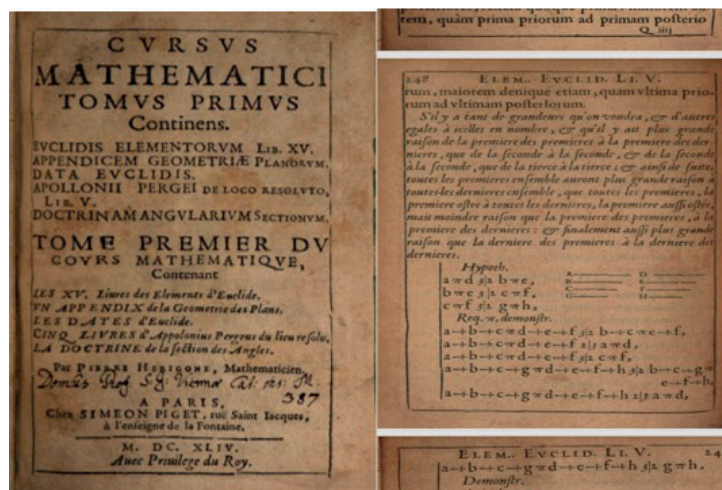


FIGURA 8. *Cursus mathematicus* de Hérigone, tomo 1; *Les xv livres des éléments d'Euclide* (libro V, fragmento de la proposición xxxiv, *Cursus mathematicus*, tomo 1, Hérigone, 1634).

5. El lector interesado en todos los detalles de la comparativa entre las diferentes columnas de las matrices  $N_n$  queda emplazado a consultar Linero y Soler (2020).

6. Véase Massa-Esteve (2010) para el estudio del tratamiento por parte de Hérigone de los *Elementos* de Euclides.

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos visto casos prácticos de la utilidad de la historia de las matemáticas en diferentes aspectos de la enseñanza, en los ámbitos de la educación media y universitaria.

En cuanto a la educación secundaria, hemos apuntado su beneficio para contextualizar un tema, para proporcionar a los alumnos un acercamiento sugerente a un concepto, para transmitirles la idea de la evolución continua de nuestra disciplina y para ponerlos sobre aviso de las dificultades que puedan encontrarse. Todo ello lo hemos aderezado con actividades alrededor del cálculo de raíces enésimas, como las de aclarar su significado geométrico, y desarrollar habilidades matemáticas en cálculo, álgebra y geometría.

Otro de los beneficios del uso riguroso de la historia en la actividad docente universitaria es desarrollar una visión y conocimientos sólidos respecto a un tema, un autor o un resultado. Si cuidamos y fomentamos dicho rigor en tales análisis, nuestra comprensión de un tema será más completa, e incluso tendremos una perspectiva general más asentada de él. En nuestras notas, lo hemos ejemplificado con el teorema de Apolonio, viendo las conexiones que existen entre diferentes ámbitos de las matemáticas, como la geometría y el análisis funcional, y recibiendo la grata sorpresa de un interesante recorrido histórico.

Por último, hemos discutido algunas de las ventajas que tiene la historia en la labor de investigación. En particular, cómo la lectura de textos antiguos fortalece nuestra cultura histórica y, con la memoria fresca, sirve a veces de inspiración para desatar, por un camino inesperado, el nudo que se cernía sobre un problema concreto. En estas notas hemos mostrado cómo unas sencillas desigualdades, que tienen su origen último en los *Elementos* de Euclides, han permitido resolver un problema técnico de acotaciones de matrices para obtener un resultado sobre minimalidad en sistemas dinámicos discretos.

## Agradecimientos

El segundo autor ha sido financiado parcialmente por el proyecto MTM2017-84079-P (AEI/FEDER, UE).



## Referencias bibliográficas

- AMIR-MOEZ, A. R.; HAMILTON, J. D. (1976). «A generalized parallelogram law». *Mathematics Magazine*, 49, pp. 88-89.
- BARROW-GREEN, J.; GRAY, J.; WILSON, R. (2019). *The history of mathematics: A source-based approach*. Vol. 1. Providence, RI: MAA Press/American Mathematical Society.
- CAJORI, F. (1910). «A history of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations of the unknown quantity». *Colorado College Publication*, 12, pp.171-286.
- «Decreto n.º 220/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia» (2015). *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, núm. 203 (3 septiembre), p. 30729.
- «Decreto n.º 221/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia» (2015). *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, núm. 203 (3 septiembre), p. 31594.
- EULER, L. (1750). «Variae demonstrationes geometriae». *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 1, pp. 49-66.
- FERREIRÓS, J. (2003). «Por la historia». *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 6, pp. 103-111.
- HÉRIGONE, P. (1634). *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*. Tomos I a IV. París: por el autor y Henry Le Gras.
- (1637). *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*. Tomo V. París: por el autor y Henry Le Gras.
- (1642). *Cursus mathematicus nova, brevi et clara methodo demonstratus, per NOTAS reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis, intellectu, faciles*. Suplemento. París: por el autor y Henry Le Gras.
- HERRERO PIÑEYRO, P. J.; LINERO BAS, A.; MELLADO ROMERO, A. (2017). «Algunos métodos de resolución numérica de ecuaciones del siglo XVI y su aplicación al aula de secundaria». A: GRAPÍ VILUMARA, P.; MASSA-ESTEVE, M. R. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, pp. 41-48.
- LINERO BAS, A.; SOLER LÓPEZ, G. (2018). «Minimal interval exchange transformations with flips». *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 38, pp. 3101-3144.
- (2020). «Minimal non uniquely ergodic flipped IETs». Prepublicación. <arXiv:2001.10989v1>.
- MASSA-ESTEVE, M. R. (2010). «The symbolic treatment of Euclid's elements in Hérigone's *Cursus mathematicus* (1634, 1637, 1642)». *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early-Modern Mathematics*, 26, pp. 165-191.
- (2014). «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's *nova scientia* (1537)». *Teaching Innovations*, 27, pp. 114-126.
- PAPPUS OF ALEXANDRIA (1986). *Book 7 of the collection*. Edición y traducción a cargo de Alexander Jones. Nueva York: Springer-Verlag.
- POINCARÉ, H. (1908). «L'avenir des mathématiques». *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 19, pp. 930-938.
- RECASENS GALLART, E. (2008). «Sobre un dels treballs d'Euler en geometria clàssica: l'E135». *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 9, pp. 205-218.
- VIÈTE, F. (1600). *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione: Ex opere restituae mathematicae analyseos, seu, algebra nova Francisci Vietae*. Edición a cargo de Marino Ghetaldi. París: David Le Clerc.
- (1646). *Francisci Vietae Opera mathematica*. Edición a cargo de F. van Schooten. Leiden: Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum.
- (1983). *The analytic art, nine studies in algebra, geometry and trigonometry*. Traducción de T. Richard Witmer. Mineola (Nueva York): Dover Publications Inc.
- ZARAGOZA, J. (1674). *Geometria magna in minimis*. Toledo: Francisco Calvo.

# L'ASSIGNATURA *HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA* A L'ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA INDUSTRIAL DE BARCELONA (ETSEIB), TRENTA ANYS DESPRÉS

**JOSEP M. PONS POBLET**

DEPARTAMENT DE RESISTÈNCIA DE MATERIALS I ESTRUCTURES A L'ENGINYERIA,  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *història de la ciència, ETSEIB, revolució científica*

## **The History of Science and Technology course at Barcelona School of Industrial Engineering (ETSEIB), thirty years on**

*Summary: Students who started out their studies in the 1988/1989 academic year at Barcelona School of Industrial Engineering (ETSEIB) had to take the subject History of Science and Technology in the first term. This course belonged to the initial module of the Industrial Engineering programme, together with Calculus I, Algebra I, Chemistry I, Graphic Communication Techniques I and Workshops. Some years later, the subject became an optional course and then subsequently elective. Thirty years after that first experience, this paper provides insight into the stated goals of the History of Science and Technology course at ETSEIB, along with personal contributions from teaching staff and students who took part in it.*

Key words: *history of science, ETSEIB, scientific revolution*

### **1. Introducció**

Els alumnes que ingressaven a finals de la dècada dels vuitanta a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona (ETSEIB) es trobaven, al primer quadrimestre, l'assignatura anomenada *història de la ciència i de la tècnica* (HCT). Aquesta matèria compartia el bloc inicial dels estudis d'enginyeria industrial amb les corresponents de càlcul I, àlgebra I, química I, tècniques d'expressió gràfica I i tallers.

La voluntat d'aquesta assignatura era la d'incloure la formació humanística en els estudis científics i tècnics dels estudiants d'enginyeria industrial (Lusa i Roca Rosell, 2004). Anys més tard, l'assignatura es transformaria en una matèria optativa per passar finalment a ser de lliure elecció.

Passats trenta anys d'aquella experiència, en aquesta comunicació es mostren els objectius detallats de l'assignatura d'història de la ciència i de la tècnica, el programa docent ofert a l'ETSEIB, així com aportacions personals de professorat i alumnes que hi participaren.

## 2. Una assignatura anomenada *història de la ciència i de la tècnica* a l'ETSEIB

El ingeniero de hoy (y de mañana) tiene tal influencia sobre el bienestar del hombre, e incluso sobre su mera supervivencia y sobre la viabilidad de existencia de nuestro planeta, que los elementos culturales y sociales deben estar en la base de su juicio profesional, junto con elementos tradicionales en su formación como son la Física y las Matemáticas. (Lusa, 1988: 83)

L'assignatura HCT passà a formar part de la matèria dels alumnes de primer curs de la titulació d'enginyer industrial<sup>1</sup> que la Universitat Politècnica de Catalunya oferia dins les aules de l'ETSEIB. Els estudiants del curs 1987-1988, al primer quadrimestre, tenien sis assignatures: càlcul I, àlgebra I, química I, tècniques d'expressió gràfica I, l'anomenada *tallers* i història de la ciència i de la tècnica.

L'assignatura la cursaven un total de 600-650 alumnes, que es dividirien en sis grups (A, B, C, D, E i F). Per tant, podem dir que cada grup constava d'un centenar d'alumnes, aproximadament, que a més era subdividit en tres per a les sessions pràctiques (una hora setmanal). La seva durada era la natural del quadrimestre (15 setmanes), a raó de quatre hores per setmana. Es computaven unes seixanta hores de docència real. Aquestes estaven dividides en l'anomenat *curs comú* i els cursos monogràfics.

	<b>Curs comú (30 hores)</b>
	<b>Monogràfic - 1 (15 hores)</b>
	<b>Monogràfic - 2 (15 hores)</b>

FIGURA 1. Estructura de l'assignatura d'història de la ciència a l'ETSEIB.

FONT: Elaboració pròpia.

Per detallar una mica més l'estructura i la temàtica d'aquests cursos, prenem com a cas concret el curs 1988-1989. És de suposar que fonamentalment l'estructura es mantindria els altres dos cursos (el previ i el posterior) que l'HCT fou impartida a l'ETSEIB, amb variacions puntuals que no afecten substancialment el que segueix.

1. La titulació es passarà a anomenar *Enginyeria Industrial* i l'ETSEIB, *Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial*, a finals de la dècada dels noranta.

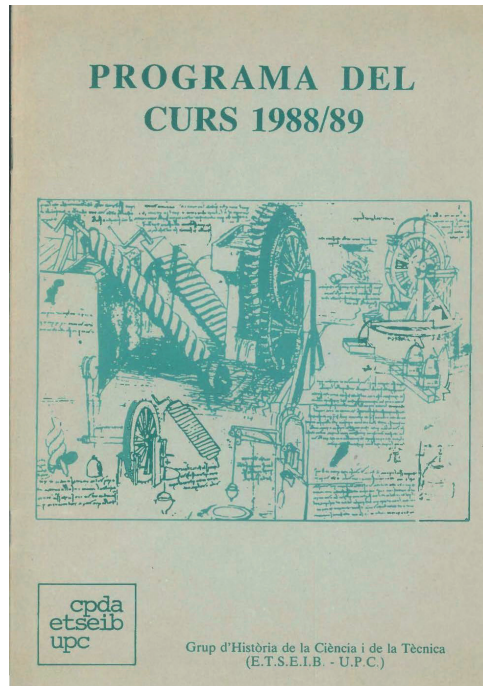


FIGURA 2. Programa del curs 1988-1989.  
FONT: Elaboració pròpia.

### 3. Curs comú i cursos monogràfics<sup>2</sup>

El curs comú, això és, per a *tots els alumnes* i cursat un dia setmanalment durant el quadrimestre, constava de tres blocs clarament diferenciats:

- Revolució científica dels segles XVI i XVII.
- Introducció a la ciència grega.
- La revolució industrial.

En paral·lel al curs comú, es presentaven els cursos monogràfics. Com que es disposa d'unes trenta hores per a aquests cursos, la metodologia docent feia cursar als alumnes dos d'aquests (15 hores + 15 hores). El claustre docent oferia vuit cursos monogràfics. Ara bé, l'estudiant no podia escollir, ja que, en estar matriculat a un grup concret, per defecte se n'hi assignaven dos ja predefinitos.

Aquests eren els següents:

- La ciència i la tècnica a la Catalunya contemporània.
- Història de la màquina de vapor.
- Història de l'energia.
- Història de la metallúrgia.
- Introducció històrica a les tecnologies simples.
- Història de l'electricitat i de l'electrotècnica.
- Revolució industrial i vies de comunicació. El transport marítim: de la vela al vapor.
- Introducció a l'arqueologia industrial.

Així, per exemple, uns alumnes podien cursar, respectivament, la correlació mostrada segons fossin del grup A o F

2. Segons indica el professor Guillermo Lusa, els monogràfics podien variar cada curs tot depenent de la disponibilitat del professorat. Es mostra la proposta oferta el curs 1988-1989.

<b>Revolució científica dels segles XVI i XVII.</b> <b>Introducció a la ciència grega.</b> <b>La revolució industrial.</b>	
	<b>La ciència i la tècnica a la Catalunya contemporània.</b>
	<b>Història de la metal·lúrgia.</b>

FIGURA 3. Assignatures del grup A.

FONT: Elaboració pròpia.

<b>Revolució científica dels segles XVI i XVII.</b> <b>Introducció a la ciència grega.</b> <b>La revolució industrial.</b>	
	<b>Introducció històrica a les tecnologies simples.</b>
	<b>Història de l'electricitat i de l'electrotècnia.</b>

FIGURA 4. Assignatures del grup F.

FONT: Elaboració pròpia.

Passem a detallar breument l'abast de cadascun d'aquests cursos.

### 3.1. *Curs comú*

Com s'ha dit, estava cursat per *la totalitat de l'alumnat*, això és uns sis-cents alumnes, més els repetidors de convocatòries anteriors no aprovades.

#### 3.1.1. *Revolució científica dels segles XVI i XVII*

Fou el bloc més *important* del tres, tant des del punt de vista d'hores de docència com de volum de

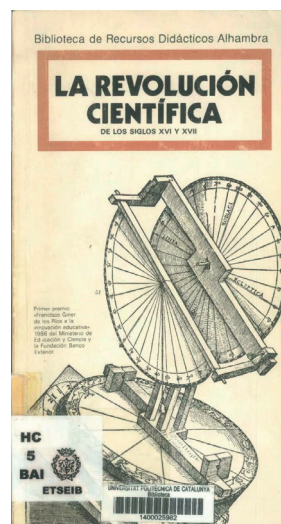


FIGURA 5. Material de l'assignatura de revolució científica dels segles XVI i XVII.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

temari. Amb un programa molt ambiciós, s'intentava explicitar l'anomenada *revolució científica* que es dugué a terme als segles XVI i XVII. Cal fer notar que l'alumnat matriculat no estava gaire avesat a aquest tipus de qüestions, per tant, és de suposar que la seva formació inicial no era molta —malgrat provenir d'un curs previ anomenat *COU* (Curs d'orientació universitària), en què aquestes matèries eren abordades directament o indirecta a l'assignatura de filosofia.

Partint de l'estudi del sistema aristoteliocoptolemaic, s'arribava a l'època de la revolució científica en què es detallava tant aspectes de la revolució copernicana com els d'un *ambiciós* mòdul anomenat *De Copèrnic a Newton*, que referia aspectes (a part d'ells dos) de Tycho, Kepler, Galileu i Descartes, entre d'altres. L'alumnat que ho desitgés disposava d'un material publicat (figura 2), així com d'un seguit de quadernets de treball a mode de fascicle que, fins a arribar al nombre de set, permetien complementar les explicacions donades a classe amb la presentació de textos i activitats corresponents. És bo recordar que l'alumnat disposava d'una hora setmanal de pràctiques en què, en grups de tres persones, es posaven en comú activitats o textos plantejats per l'equip del professorat

### 3.1.2. Introducció a la ciència grega

El guió que acompanyava la presentació del segon monogràfic del curs comú també era realment ambiciós. I és que el seu objectiu passava per presentar ítems de la ciència grega que, tot i partint del mal anomenat *miracle grec* (jonis del segle VI aC), arribava fins a la medicina de Galè, passant per les escoles pitagòriques, eleates, platòniques i aristotèliques, amb pinzellades de la ciència alexandrina i de la grecoromana.

Per dur-lo a terme es complementava amb una sèrie de propostes de lectures incloses al fascicle que s'edità (figura 3) per a aquesta finalitat. Aquestes eren de G. Murray (*El valor de Grecia para el futuro*), de M. Finley (*El legado de Grecia*), de B. Farrington (*Ciencia griega: resúmenes y conclusiones*) per concloure finalment amb G. Lloyd (*Ciencia y matemáticas*).

Aquest fascicle començava amb la sentència del jurista i historiador H. Sumner Maine: «Excepto las fuerzas ciegas de la naturaleza, no se mueve nada en el mundo que no sea griego en sus orígenes.» Sens dubte tota una presentació d'intencions i objectius.

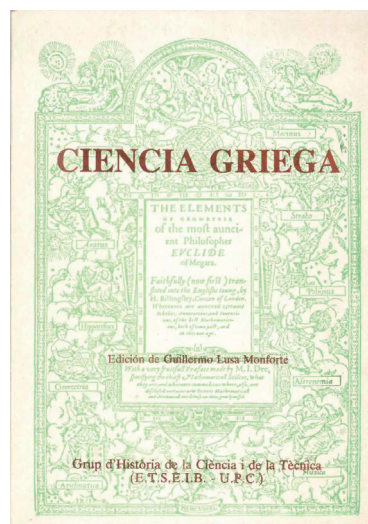


FIGURA 6. Material de l'assignatura de ciència grega.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

### 3.1.3. La revolució industrial

La tercera part del curs comú presentava, molt puntualment, l'estudi de la revolució industrial. És obvi que aquest monogràfic ja donaria per a tota una assignatura dins el currículum de l'estudiant, precisament, d'enginyeria industrial. Per dur-lo a terme, s'oferien una sèrie de textos complementats amb explicacions docents a l'aula. En aquesta, fonamentalment s'esbossaven idees de la naturalesa de la revolució industrial i del seu marc humà, pròpiament dit, per posteriorment presentar-la (molt puntualment) a Catalunya amb les transformacions socials causades per aquesta revolució.

Amb aquesta finalitat, s'edità un petit fascicle de treball amb uns breus textos d'Alan Thompson (*La dinàmica de la revolució industrial*), Eric Hobsbawm (*Industria e imperio*), Jordi Nadal (*Agricultura, comercio y crecimiento en la España contemporánea*) i finalment de Pierre Vilar (*La industrialización europea*).



FIGURA 7. Material de l'assignatura de la revolució industrial.  
 FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

## 3.2. Cursos monogràfics

Com bé diu el seu nom, aquests eren específics i, en principi, independents uns dels altres. Tal com es comentava prèviament, els cursos monogràfics foren agrupats de dos en dos i es van oferir als sis grups com s'indica a continuació.

### 3.2.1. Grup A: La ciència i la tècnica a la Catalunya contemporània / Història de la metal·lúrgia

Amb el monogràfic titulat *La ciència i la tècnica a la Catalunya contemporània* es pretenia posar a l'abast de l'alumnat els elements principals de l'activitat científica i tècnica en els temps recents a Catalunya. Per fer-ho, s'escollia el període que va des de la fundació de l'Escola d'Enginyers fins a la Guerra Civil, i s'abordava «principalment els aspectes institucionals i socials, deixant gairebé de banda els continguts específics de l'activitat científica i tecnològica», tal com es recollia al fascicle.

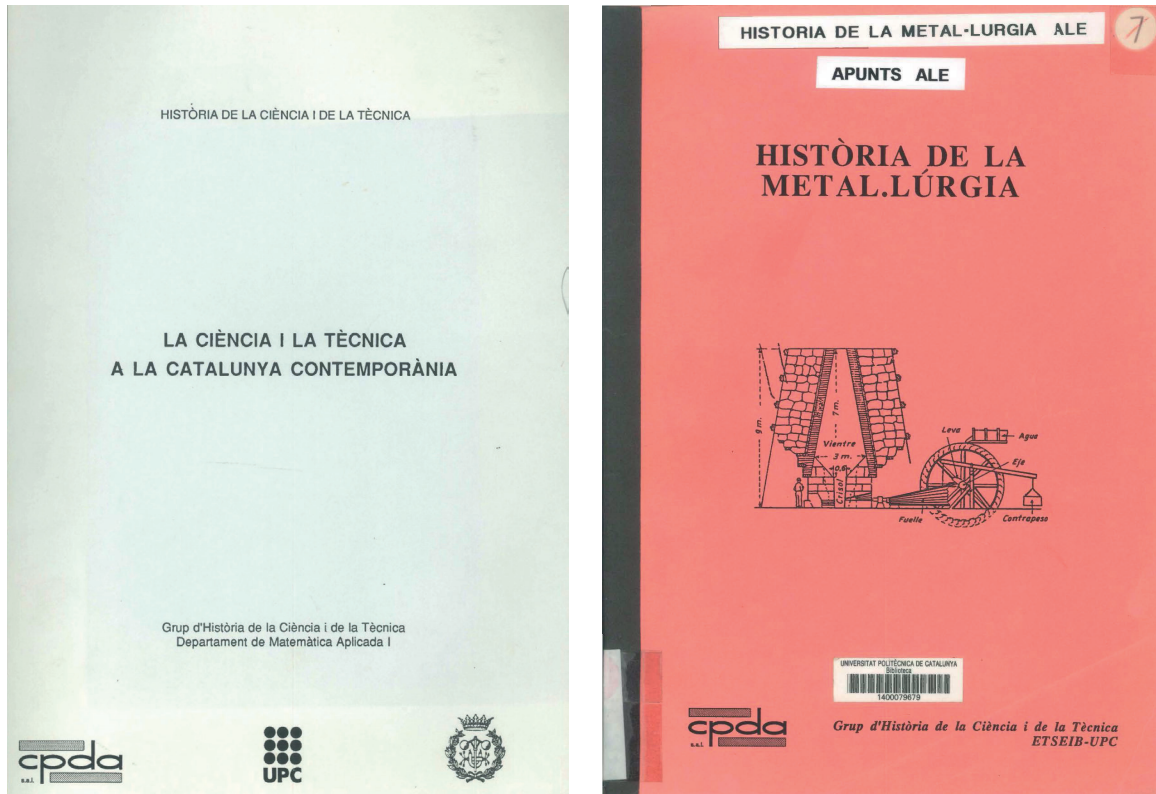


FIGURA 8. Monogràfics del grup A.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

Dins la formació dels futurs enginyers, l'estudi dels metalls i els seus aliatges és, sens dubte, un element clau, tal com queda reflectit als diferents plans d'estudi.

Aquests coneixements es podien obtenir (ja inicialment) amb les eines que donava el monogràfic titulat *Història de la metallúrgia*. En ell s'estudiava el coneixement, les propietats i utilitzacions dels principals metalls, així com una història del coure i dels aliatges lleugers, per acabar amb un breu recorregut històric de la siderúrgia des de l'antiguitat fins al segle xx.

### 3.2.2. Grup B: Història de la màquina de vapor / Introducció històrica a les tecnologies simples

Partint dels precedents de la màquina de vapor i, formulant els fonaments científics així com les primeres utilitzacions de la força motriu del vapor, es presentava a l'estudiantat el monogràfic *Història de la màquina de vapor*. Aquest mostrava la màquina de vapor de James Watt així com les seves aplicacions a la industrialització i a les comunicacions per passar-ho, posteriorment, a contextualitzar a Catalunya.

El programa del curs monogràfic *Introducció històrica a les tecnologies simples* partia de l'estudi de l'energia hidràulica, els inicis del ferrocarril, i continuava amb un breu recorregut pel tèxtil, per l'adobat de les pells i la fabricació del paper manualment a partir dels draps. El curs també ofería la presentació de la farga i els forjadors (amb especial èmfasi en la farga catalana), les armes (arcs, ballestes i armes de foc), i conclouia amb els mètodes constructius que incloïen el fang, maons, pedra, fusta i murs, entre d'altres. Certament tenia un temari molt extens, per la qual cosa només es donaven unes pinzellades brevíssimes de la temàtica.





FIGURA 9. Monogràfics del grup B.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

### 3.2.3. Grup C: Història de l'energia / La ciència i la tècnica a la Catalunya contemporània

El monogràfic *Història de l'energia* volia presentar a l'alumnat una aproximació històrica al desenvolupament de les fonts d'energia i al seu principi de conservació, aspectes clau en la formació dels estudiants d'enginyeria.

També es plantejava el marc històric del concepte d'energia dins el pensament científic tot lligant-lo amb la relació amb la tècnica.

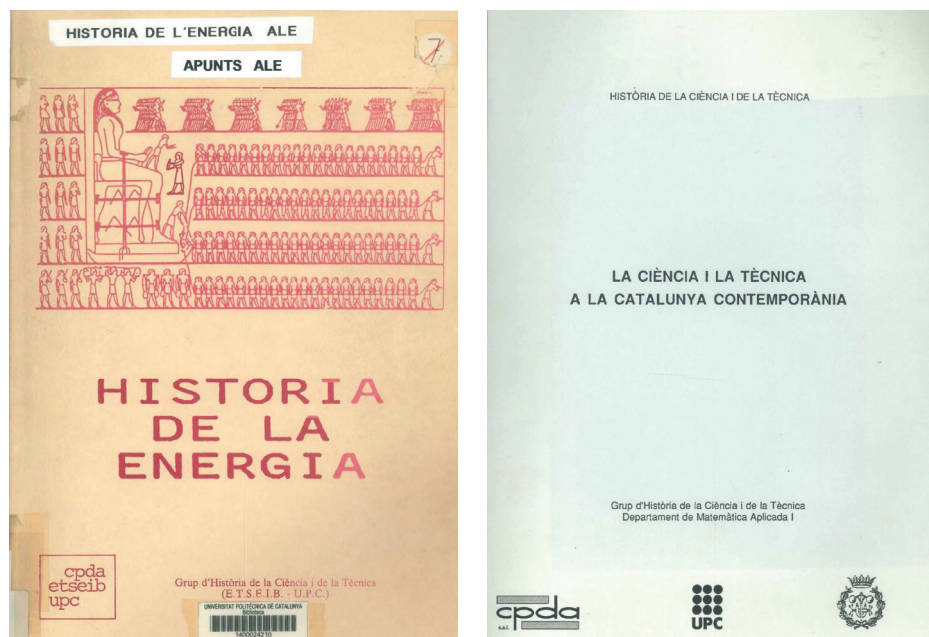


FIGURA 10. Monogràfics del grup C.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

### 3.2.4. Grup D: Revolució industrial i vies de comunicació. El transport marítim: de la vela al vapor / Història de la màquina de vapor

El monogràfic *Revolució industrial i vies de comunicació. El transport marítim: de la vela al vapor* volia presentar a l'alumnat les transformacions provocades per la revolució industrial en aquest sector concret i específic com era el sector naval. Aquest, per defecte, inclouria els bucs, les indústries navals i els ports com a principals infraestructures. Per aconseguir-ho, el programa presentava la navegació a vela (velers i marina de vela catalana de 1790 a 1870) i la navegació a vapor, passant per la indústria naval a Catalunya, les transformacions econòmiques i el port de Barcelona.

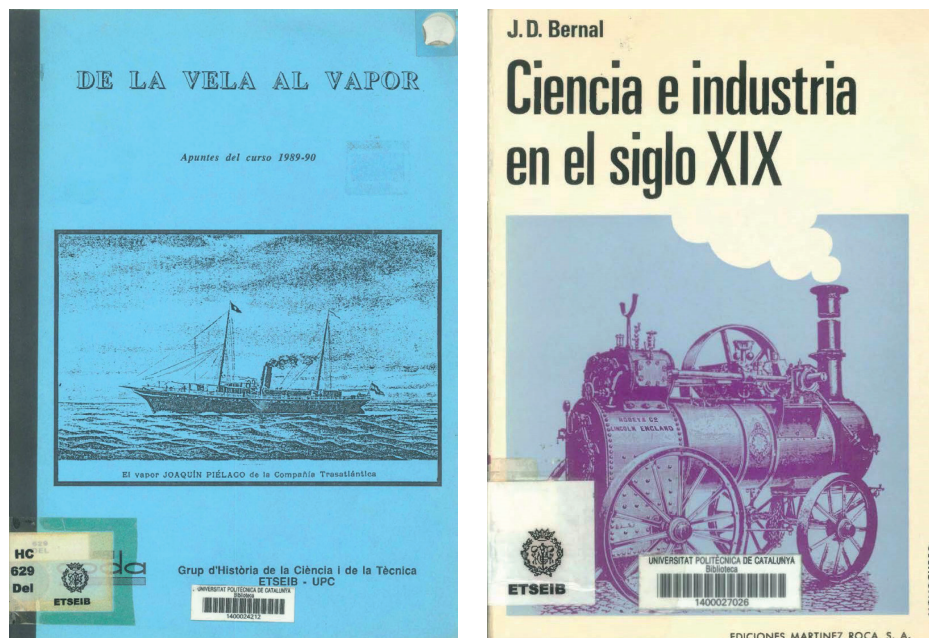


FIGURA 11. Monogràfics del grup D.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

### 3.2.5. Grup E: Història de l'energia / Introducció a l'arqueologia industrial

L'alumnat matriculat en aquest grup es trobava amb una matèria anomenada *arqueologia industrial* de la qual, de ben segur, no havia sentit a parlar mai. Definida en els apunts docents «como un campo de estudio referido a la investigación, estudio, clasificación y, en algunos casos, conservación de monumentos industriales. Aspira también a hacer que se aprecie el significado de tales monumentos en el contexto de la historia social y tecnológica», era presentada en forma d'articles recollits en un quadern d'apuntes que servien de guió a les classes d'aula.

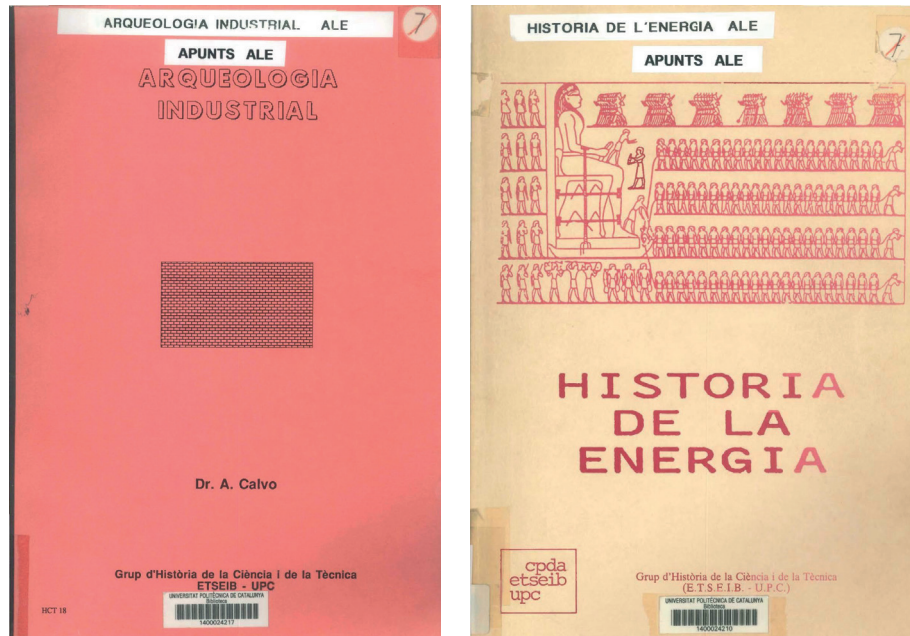


FIGURA 12. Monogràfics del grup E.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

### 3.2.6. Grup F: Introducció històrica a les tecnologies simples / Història de l'electricitat i de l'electrotècnia

El monogràfic *Història de l'electricitat i de l'electrotècnia* pretenia introduir el futur tècnic dins la part històrica de l'electricitat i de l'electrotècnia, matèries que fins llavors, especialment la segona, eren bastant desconegudes per a ell. El primer bloc —la història de l'electricitat— incloïa els conceptes d'*electroestàtica* i *electrocinètica*. La part de l'electrotècnia es fonamentava principalment en els generadors de corrent continu (CC) i corrent altern (CA), els motors de CA, així com l'estudi del transformador.



FIGURA 13. Monogràfics de grup F.

FONT: Elaboració pròpia a partir dels fascicles dels monogràfics.

#### 4. Trenta anys més tard

Han passat més de trenta anys d'aquell projecte inicial d'implementació de la història de la ciència i de la tècnica (HCT) a l'ETSEIB. L'assignatura, obligatòria per a alumnes de primer, passaria més tard a ser una matèria optativa per, finalment, esdevenir una disciplina anomenada de *lliure elecció*. Actualment, amb el nou pla d'estudis, l'assignatura forma part del quadrimestre vuitè de la titulació de grau en enginyeria en tecnologies industrials.

Explícitament ja no s'anomena amb la terminologia genèrica d'història de la ciència i de la tècnica, sinó, tal com es pot comprovar a la guia docent de la mateixa ETSEIB,<sup>3</sup> les referències són ara els títols dels monogràfics corresponents. Així trobem: Albert Einstein i la ciència i la tècnica del segle xx; el tren, transport i tecnologia; del vapor a l'alta velocitat, i la història de la matemàtica aplicada a l'enginyeria.

Com és evident, l'alumnat també ha disminuït: s'ha passat d'aquells sis-cents inicials, quan era una assignatura obligatòria, als vint a trenta alumnes actuals.

#### 5. Reflexions finals

Per concloure, s'ha volgut deixar plantejades unes reflexions que, a mode de qüestions, podrien ajudar el potencial lector a preguntar-se per què disciplines com la que ens ocupa no han acabat de quallar en estudis tècnics (com seria, en el nostre cas, el de la titulació d'enginyeria industrial):

— Estava ben ubicada a primer curs o potser seria millor al final del cicle docent, com actualment, quan els alumnes ja tenen un bagatge científicotècnic que a primer curs encara els manca?

— El temari era massa extens per a uns alumnes que, potser, estaven *més preocupats* per assignatures com càlcul i àlgebra?

— El temari, a més d'extens, era massa generalista? És millor enfocar-ho com avui en aspectes més específics de l'enginyeria industrial?

#### 6. Agraïments

L'autor vol fer constar explícitament l'ajuda, la disponibilitat i l'accés a gran part de la documentació que ha trobat en el professor Guillermo Lusa, així com en els professors Antoni Roca, Carles Puig i Maria Rosa Massa, tots ells pertanyents al Grup de Recerca per a la Història de la Ciència i de la Tècnica (GRHCT). El més sincer agraïment.

---

3. Per a més informació, podeu consultar <https://mat.upc.edu/ca/docencia/centres-i-estudis/etseib/grau-en-enginyeria-industrial>.

## Referències bibliogràfiques

AGUSTÍ, J. (1989). *Ciència i tècnica a Catalunya en el segle XVIII o la introducció de la màquina de vapor*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

LUSA, G. (1988). «Una experiencia: un curso de historia de la ciencia y de la técnica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona». A: CODINA, R.; LLOBERA JIMÉNEZ, R. M. (coord.). *Actes del III Simposium d'Ensenyament i Història de les Ciències i de les Tècniques: Història, Ciència i Ensenyament* (Barcelona 23-25 març 1988). Madrid: Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, SEHCYT, p. 81-90.

LUSA, G.; ROCA ROSELL, A. (2004). «El lugar de la historia de la ciencia y de la técnica en el espacio europeo de educación superior». A: *Actes de la Jornada de Reflexió i Debat sobre el Model Docent de la UPC en l'Espai Europeu d'Educació Superior*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.

### Fascicles de treball

BAIG, A.; AGUSTENCH, M. (1987). *La revolución científica de los siglos XVI y XVII*. Madrid: Alhambra.

CALVO, A. (1988). *Arqueología industrial*. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

GRUP D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA (1988). *Historia de la energía: material de trabajo*. Barcelona, ETSEIB. CPDA.

— (1988). *Història de la metal·lúrgia*. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

— (1988). *La revolución industrial*. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

— (1988). *La revolució científica dels segles XVI i XVII: programa*. Fascicles 1-7. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

— (1989). *De la vela al vapor*. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

— (1989). *Introducció històrica a les tecnologies simples*. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

LUSA, G. (1987). *Ciència grega*. Grup d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

MARTÍNEZ BARRIOS, L. (1988). *Evolución de las formas de las máquinas eléctricas*. Grup d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

ROCA A. (1987). *Ciència i tècnica a la Catalunya contemporània*. Grup d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Barcelona: ETSEIB. CPDA.

# FILOSOFIA DE LA CIÈNCIA, HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES: PERSPECTIVES TEÒRIQUES ACTUALS I EMERGÈNCIA DEL MODEL DE GÈNERE

**NÚRIA SOLSONA PAIRÓ;<sup>1</sup> MARIO QUINTANILLA GATICA;<sup>2</sup> YEFRIN ARIZA<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

<sup>2</sup> PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

<sup>3</sup> UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL MAULE, XILE.

Paraules clau: *epistemologia, història, didàctica, ciència, gènere*

## **Philosophy of science, history of science and science education: Current theoretical perspectives and emergence of the gender model**

*Summary: This paper gives an overview of the contemporary theoretical perspectives with respect to the relations now existing between philosophy of science, history of science and science education, as paths for enriching our knowledge and educational action. In this respect, it may moreover be assumed that the emergence of the gender model will provide a broader understanding of academic science.*

Key words: *epistemology, history, education, science, gender*

### **Introducció**

A la literatura es poden trobar treballs realitzats fa més de vint anys que busquen vincular la filosofia de la ciència (FC) i la història de la ciència (HC) amb la didàctica de les ciències (DC). Des de llavors s'ha fet evident que aquesta vinculació porta a l'enfortiment de les referències fonamentals en les estructures teòriques i pràctiques que dirigeixen l'ensenyament de les ciències i la formació del professorat de ciències. Avui diferents autors (Adúriz-Bravo, 2005; Quintanilla, Daza i Cabrera, 2014; Matthews, 1994) troben fonamentals aquests vincles i es dediquen a reflexionar sobre els discursos que des de la didàctica de les ciències es generen sobre la FC i la HC. Tot i que la inclusió d'aquests continguts «metacien-

tífics» està en augment, a l'interior de la comunitat didàctica existeixen diferències substantives pel que fa a com hauria de realitzar-se aquest apropament. Algunes d'aquestes diferències es troben en visions diacròniques i, per tant, reduccionistes, en les quals el paper de les dones en la història de la ciència o és escàs o bé s'omet.

Amb la intenció de continuar el debat entre les disciplines, volem seguir la reflexió sobre la necessitat d'incloure la història i la filosofia de la ciència en les actuals línies d'investigació de la didàctica de les ciències, la ciència d'ensenyar ciències. Aquesta reflexió no pot ser només teòrica i ha d'abastar les pràctiques d'ensenyament de les ciències en tots els nivells educatius, superant una interrelació unidireccional. La interrelació entre HC, FC i DC ha de ser interrelacional i ha de contenir el model de gènere en el seu nucli central.

La reflexió sobre què és la ciència s'ha fet tan complexa que no hi ha un consens en la comunitat filosòfica, didàctica ni en la comunitat científica. Aquesta última es continua considerant hereva dels pensadors grecs i, a partir d'ells, d'una seqüència llarguíssima de personatges que, al llarg dels temps, han anat elaborant els coneixements experimentals, reconstruïts i refets milers de vegades, que han pogut ser aplicats als artefactes tècnics que fan que la nostra vida sigui ara més còmoda que la de fa uns segles. Però aquesta imatge de la ciència «clàssica», «tradicional» o fins i tot «positivista» es trasllada a les aules i es transmet a l'hora d'ensenyar ciències, i es converteix en quelcom cada vegada més problemàtic, generador de les taxes de fracàs més importants a l'escola (Izquierdo, 2007).

S'ha passat de considerar que la ciència és un conjunt organitzat i validat de coneixements representats exclusivament per axiomes o lleis —tal com en un enfocament sintàctic s'acostuma a relacionar amb la concepció científica promulgada per una part dels integrants del Cercle de Viena— que expliquen com és el món en què vivim a considerar que la ciència és un tipus d'activitat humana i, per tant, complexa i difícil de descriure. Volem substituir el model tradicional de ciència com a «coneixement justificat experimentalment» per un altre més ric i útil, la ciència com a «activitat humana» (Izquierdo, 2007). Per iniciar el desenvolupament d'aquestes idees, creiem fonamental una anàlisi crítica sobre la ciència que aprofundeixi en la cerca d'una fonamentació epistemològica i històrica que configuri el model de gènere en les línies de vinculació epistemològiques didàctiques.

### **Filosofia de la ciència**

La FC amb perspectiva de gènere busca comprendre com la representació de la construcció del coneixement científic ha estat influïda per les nocions de gènere i els rols de gènere de la societat. La intersecció de gènere i ciència permet reexaminar qüestions fonamentals en el camp de la ciència per revelar qualsevol signe de biaix de gènere (Richardson, 2010).

En aquest sentit, la FC posa de manifest la subrepresentació de les científiques en l'acadèmia i la possibilitat que la ciència tingui biaixos androcèntrics actualment (Rolin, 2006; Wylie, 2008). Es planteja que la construcció de teories científiques és més compatible amb els estils cognitius masculins i el seu raonament. Una àmplia gamma d'estudis internacionals posa en evidència la controvertida (i disminuïda) participació i protagonisme de les dones en àmbits científics específics. Darrerament, nombrosos projectes estimulen l'interès femení per la ciència des de l'educació secundària (Osborne i Dillon, 2008; Schreiner i Sjøberg, 2004). L'epistemologia amb perspectiva de gènere suggereix que cal integrar modes de pensament i lògica femenins infravalorats per les imatges de la ciència tradicionals, fet que permetrà enriquir i ampliar les perspectives metacientífiques actuals.

També busca promoure la igualtat de gènere en els camps científics i un major reconeixement dels èxits de les científiques.

La FC que inclou el model de gènere incideix en tres àmbits de treball: les crítiques del biaix de gènere en la ciència, la història de les dones en la ciència i en les ciències socials i les consideracions de política pública sobre l'estat de les dones en la ciència. La FC que inclou el model de gènere desafia la idea que la ciència està «lliure de valors» (Crasnow, 2013), és a dir, considera que la ciència està sotmesa a efectes socials, i la investigació que es porta a terme per les persones, siguin homes o dones, té un cert biaix. Per tant, vol fugir de «la divisió dicotòmica de valors de la societat» que ja establí la cultura grega clàssica:

Home	Dona
Civilització	Naturalesa
Raó	Emoció
Ordre	Caos

La FC amb perspectiva de gènere és molt crítica amb la manca d'accés i oportunitats per a les dones a la ciència i planteja que la ciència ha estat «distorsionada pels valors sexistes». Reconèixer el paper social en la producció de coneixement té conseqüències, tant per a la forma en què formem els científics com per a la manera com eduquem en ciències. Amb una imatge de la ciència amb clares implicacions i influències socials, relacionada amb les necessitats i els desitjos humans, els grups socials minoritaris tindran una motivació més gran per tenir èxit i persistir en els seus cursos de ciències o cursar una carrera científica. Principalment perquè els membres de grups menys representats veuen com la ciència pot produir coneixements que responen a inquietuds, problemàtiques, activitats i desitjos de persones immerses en una societat com la seva.

Des d'aquesta perspectiva, la FC alerta el professorat sobre la necessitat d'una aproximació a les representacions, concepcions i creences que poden ser útils en els llibres de ciència perquè les teories científiques que s'ensenyen tinguin sentit i valor per a qui les aprèn i qui les ensenya des d'una perspectiva no androcèntrica (Solsona i Quintanilla, 2019). L'estudiantat i el professorat necessiten saber comprendre amb què i com es relacionen els models teóricoconceptuals amb la història de la mateixa humanitat, i aconseguir així confrontar-los amb situacions de la seva vida quotidiana o del món real o, millor encara, amb situacions de la vida real en altres moments del desenvolupament de l'activitat científica (Giere, 1992).

### La història de les ciències

Superada la fase hagiogràfica de la segona meitat del segle xx, que lloava els homes blancs «descobridors» de les grans veritats sobre el món, a partir de la dècada dels noranta del segle passat, la HC és una eina de reflexió per fer de la ciència una plataforma per a l'emancipació de les persones. Entenem que la HC ha de ser un contingut metatransversal en el discurs de l'aula i la investigació didàctica. La HC proporciona una reflexió crítica sobre la ciència de gran valor per a la formació de la ciutadania. Permet establir una mirada diacrònica i contextual sobre la ciència. Facilita l'avaluació pública i col·lectiva de l'abast i els límits de la ciència com a producte i com a procés humà, i esdevé, per tant, una part substancial de la cultura.



La HC subministra eines rigoroses de pensament i de discurs relacionades amb l'argumentació i la narrativa, les quals promouen en el professorat de ciències una comprensió més completa de la construcció i el desenvolupament de les disciplines científiques. En aquest sentit, la història de la ciència es converteix en una eina d'anàlisi metacientífica potent que dona suport a la generació d'idees, enfocaments, materials, recursos i textos per dissenyar un ensenyament i aprenentatge de les ciències més significatius. En resum, permet «buscar pistes» històriques per incidir en l'aula de ciències i en la formació del professorat (Izquierdo, 2007). La ciència sense història no imagina el futur, perquè desconeix la sorpresa de preguntes imprevistes.

No obstant això, i malgrat el reconeixement d'aquestes potencialitats, s'ometen les aportacions de les dones a la HC, oblidant l'àmplia i diversa gamma d'estudis internacionals que mostren la participació i el protagonisme de les dones en períodes històrics i àmbits científics específics. La història de la ciència s'ha de convertir en un vehicle per promoure i desenvolupar el pensament no androcèntric en el professorat en formació i en exercici estimulant aprenentatges de nivell superior des d'una perspectiva més interessant i prometedora intel·lectualment. En aquest sentit, la inserció d'un model de gènere en la història de la ciència podria seguir les etapes següents. En primer lloc, identificar el nom de les científiques, les seves paraules, les seves narratives i pràctiques científiques. En segon lloc, reconèixer la seva autoritat femenina, que en molts casos va ser palesa en l'època històrica en què van viure (per això cal una anàlisi de la pràctica científica femenina que reconstrueixi els moments històrics en què van intervenir). Posteriorment, seguir els itineraris en contextos (aparentment) no científics, com pot ser el d'una mestressa de casa, com Agnes Pockles, que va estudiar la tensió superficial a partir de l'aigua amb sabó de rentar plats (Solsona, Joglar i Garrido, 2017). Finalment, cal construir genealogies femenines del coneixement científic.

Quan examinem amb intencionalitat epistemològica la vida i èpoques de científics i científiques, la HC humanitza els continguts propis de la ciència que es divulga i s'ensenyava. Emocionen els episodis desconeguts, evadits, omesos i oblidats, potser intencionadament. Generen «identitats» que reconfiguren sentits i significats en els quals sentiments, afectes i llenguatges reconeixen en les individualitats i talents les nostres pròpies limitacions, esperances i somnis. Aquesta perspectiva és necessària i útil per comprendre la naturalesa de la ciència i qüestiona, amb arguments potents, l'androcentrisme, científisme i dogmatisme que encara és habitual trobar en les classes i textos d'ensenyament de la ciència.

### **La didàctica de les ciències**

Ens situem en una DC fortament influïda per la HC i la FC, ja que aquests referents donen consistència a la presa de decisions del professorat respecte de la construcció del coneixement científic a les aules, és a dir, la construcció de la ciència escolar (Izquierdo-Aymerich *et al.*, 1999). No obstant això, veiem que en la realitat es coneix poc o gens d'aquests elements d'anàlisi per ajudar a superar els dubtes o contradiccions que, eventualment, sorgeixen en la reflexió del professorat de ciències i del mateix estudiant que aprèn ciències malgrat el seu professorat. L'origen d'aquests dubtes, contradiccions i acords resideix a acceptar que el més important de la ciència als centres educatius i en la formació professional del professorat de ciències és actuar amb un objectiu compartit i negociat entre estudiantat i docents. I en el fet que és difícil que les expectatives tradicionals dels estudiants (aprovar o «passar curs») coincideixin amb l'objectiu del coneixement científic, és a dir, interpretar fenòmens pensant i discutint en un entorn disciplinari en què es parla, escriu, comunica i divulga la ciència.

Des de dècades recents, nombrosos projectes propicien estimular l'interès femení per la ciència des dels nivells educatius de primària i secundària. Per a això s'utilitzen tot tipus de recursos, des de jocs dissenyats específicament fins a la utilització de biografies de dones científiques rellevants per oferir models d'imitació i referència per a les noies (Lires, Nuño i Solsona, 2003). A més, s'intenta promoure la reflexió en noies i nois sobre l'aportació de les dones a la ciència. En aquest context, el professorat esdevé un mediador necessari i valuós per promoure l'interès genuí per la ciència en el seu alumnat, de manera que ajuda a reduir la bretxa de gènere en els estudis científics dels nostres països. L'experiència ens indica que la utilització en les aules de models de científiques que van treballar en altres èpoques i condicions històriques, o que ho fan en el moment actual, reforça l'autoestima de les alumnes en el procés d'aprenentatge i les estimula de cara a l'elecció o continuïtat d'estudis de ciències experimentals. Al mateix temps, possibilita que els alumnes millorin la percepció de la igualtat de dones i homes en la ciència, i, per tant, facilita el treball al professorat preocupat per la integració de la perspectiva de gènere a l'aula.

Considerem rellevant introduir la discussió emergent en les darreres dècades sobre el rol de les dones en la producció de coneixement científic i en l'ensenyament científic. Una part d'aquest treball pretén explicitar la necessitat d'establir diàlegs entre la HC, la FC i la DC que permetin superar les inadequacions que es presenten en la introducció de continguts complexos i necessaris com els de gènere i educació científica.

## Referències bibliogràfiques

- ADÚRIZ-BRAVO, A. (2005). *Una introducción a la naturaleza de la ciencia: La epistemología en la enseñanza de las ciencias naturales*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.
- ADÚRIZ-BRAVO, A.; ARIZA, Y.; ERLAM, N. (2011). «Referencias epistemológicas en la construcción de una “naturaleza de la ciencia” para la alfabetización científica». *Revista Chilena de Educación Científica*, 10, 2, p. 28-33.
- CRASNOW, S. (2013). «Feminist philosophy of science: Values and objectivity». *Philosophy Compass*, 8, 4, p. 413-423.
- GIERE, R. (1992). *Cognitive models of science*. Minneapolis: University of Minnesota Press.
- IZQUIERDO, M. (2007). «Fundamentos epistemológicos en la enseñanza de la ciencia». A: CHAMIZO, J. A. (ed.). *La esencia de la química*. Mèxic: Universidad Autónoma de México, p. 29-59.
- IZQUIERDO-AYMERICH, M.; ESPINET, M.; GARCÍA ROVIRA, M. P.; PUJOL, R. M.; SANMARTÍ, N. (1999). «Caracterización y fundamentación de la ciencia escolar». *Enseñanza de las Ciencias*, número extra, p. 79-92.
- LIRES, M.; NUÑO, T.; SOLSONA, N. (2003). *Las científicas y su historia en el aula*. Madrid: Síntesis.
- MATTHEWS, M. R. (1994). *Science teaching: The role of history and philosophy of science*. Nova York: Routledge.
- OSBORNE, J. F.; DILLON, J. (2008). *Science education in Europe*. Londres: Nuffield Foundation.
- QUINTANILLA, M.; DAZA, S.; CABRERA, H. (ed.) (2014). *Historia y filosofía de la ciencia: Aportes para una «nueva aula de ciencias», promotora de ciudadanía y valores*. Santiago de Chile: Bellaterra.
- RICHARDSON, S. S. (2010). «Feminist philosophy of science: history, contributions, and challenges». *Synthese*, 177, 3, p. 337-362.
- ROLIN, K. (2006). «The bias paradox in feminist standpoint epistemology». *Episteme*, 3, 1-2, p. 125-137.
- SCHREINER, C.; SJÖBERG, S. (2004). *ROSE: The relevance of science education: Sowing the seeds of ROSE*. Oslo: University of Oslo. (Acta Didactica; 4)
- SOLSONA, N.; JOGLAR, C.; GARRIDO, C. (2017). «Agnes Pockles: pionera del estudio de la tensión superficial». A: QUINTANILLA, M. (ed.). *La historia de la ciencia en la investigación didáctica*. Santiago de Chile: Bellaterra, Sociedad Chilena de Didáctica, Historia y Filosofía de las Ciencias, p. 121-141. També disponible en línia a <[http://laboratoriogrecia.cl/wp-content/uploads/downloads/2018/01/Libro-Historia\\_final\\_web.pdf](http://laboratoriogrecia.cl/wp-content/uploads/downloads/2018/01/Libro-Historia_final_web.pdf)> [Consulta: 8 maig 2021].
- SOLSONA, N.; QUINTANILLA, M. (2019). «Presentación». A: QUINTANILLA, M.; SOLSONA, N. (ed.). *Mujeres, educación y ciencia en América Latina: Aportes teóricos y prácticos para el profesorado*. Santiago de Chile: Bellaterra, Sociedad Chilena de Didáctica, Historia y Filosofía de las Ciencias, p. 15-18. També disponible en línia a <<http://laboratoriogrecia.cl/wp-content/uploads/downloads/2020/01/Libro-Digital-Mujeres-Educacion-C3%B3n-y-Ciencia.pdf>> [Consulta: 8 maig 2021].
- WYLIE, A. (2008). «Social constructionist arguments in Harding's science and social inequality». *Hypatia*, 23, 4, p. 201-211.

## LA TAULA PERIÒDICA DELS ELEMENTS QUÍMICS

**PERE GRAPÍ VILUMARA**

CENTRE D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

La sessió temàtica de la XVII Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament va estar dedicada a la taula periòdica dels elements químics, atès que durant l'any 2019 es va commemorar el 150è aniversari de la publicació de la primera versió de la taula de Mendelèiev. Aquesta efemèride era una bona ocasió per obrir una reflexió entorn d'aspectes rellevants com: 1) el paper que històricament han tingut les classificacions, i el de la taula periòdica en particular, en l'ensenyament de la química; 2) la conveniència d'incloure aspectes del desenvolupament històric de la taula periòdica en el seu ensenyament; 3) les activitats d'aprenentatge relacionades amb la taula periòdica que consideren el seu context històric, i 4) les diverses qüestions epistemològiques que la taula periòdica suscita en relació amb l'ensenyament de la química.

Les comunicacions presentades en aquesta sessió es van aproximar, amb major o menor extensió, als aspectes esmentats anteriorment. Carlos Agudelo i Mercè Izquierdo varen presentar els resultats de la seva recerca sobre la caracterització dels diferents relats que els llibres de text exposen en relació amb la taula periòdica. Josep Maria Fernández i Carme Zaragoza van advocar en la seva presentació per la integració d'aspectes històrics del desenvolupament de la taula periòdica en l'ensenyament de la química a secundària per afavorir l'aprenentatge de la informació que pot transmetre la taula. La presentació de Maria Rosa Muñoz Bello es va centrar en les idees del professor de química Francisco de Paula Montells i Nadal sobre les classificacions químiques i alguns conceptes clau en el desenvolupament de la taula periòdica. En el rerefons de la seva presentació hi havia la reivindicació tant de la tasca creativa del professorat com de l'espai de l'aula en la construcció de coneixements.

A continuació us presentem dos articles que es corresponen a les dues comunicacions restants de la sessió. En el primer, l'aproximació de Núria Solsona permet ampliar el nostre coneixement sobre els elements químics i la taula periòdica des de la perspectiva de gènere, tot revisant el paper de diverses dones científiques que van participar en treballs al voltant del desenvolupament de la taula periòdica. En el segon, Rosa Maria Melià i Maria Tura Puigvert ens proposen una mirada sobre la taula periòdica tot vinculant els elements amb el color. Des dels noms d'elements que es relacionen amb el color fins als elements que intervenen en el color dels leds.

El debat posterior a la sessió va enriquir de forma significativa les presentacions i va tornar a posar de manifest la necessitat i la utilitat de dedicar una sessió temàtica dins de la jornada.

## LA TAULA PERIÒDICA DE LES CIENTÍFIQUES

**NÚRIA SOLSONA PAIRÓ**

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA.

Paraules clau: *química, gènere, taula periòdica, elements*

### **The periodic table of women scientists**

*Summary: This paper makes a brief review of several women involved in the work connected with the periodic table, who sought to identify new elements, calculate atomic weights and chemical properties, refine separation techniques, obtain pure substances, and improve experimental proof. Some of them had worked as head assistants in the most renowned laboratories and others worked with men scientists who had received the Nobel Prize. All of them helped to expand our knowledge of the chemical elements and of the periodic table.*

Key words: *chemistry, gender, periodic table, elements*

### **Introducció**

Marie Skłodowska Curie (1867-1934) és la científica més coneguda pel seu doble premi Nobel sobre la recerca entorn de la radioactivitat i el descobriment del poloni i el radi. Marie Curie i Lise Meitner (1878-1968) van ser l'excepció, la resta de científiques van ser ajudants de recerca indispensables, sense les quals els seus col·legues no haurien avançat en el treball experimental ni en la identificació dels elements.

En un grup de vint dones científiques russes, destaquem Anna Federovna Volkova (1800-1876), que va morir el mateix any que va presentar a l'Exposició Universal de Tecnologia de Londres els dos treballs científics que li van obrir les portes de la Societat de Química Russa. Era molt ben considerada pels seus col·legues, estava ben integrada en la comunitat química i va treballar amb Mendeléiev.

Julia Lermontova (1846-1919) va ser la primera dona russa doctora en química (1874, Universitat de Göttingen) i la segona dona a obtenir un doctorat a

Europa. Filla d'un general de l'escola militar de Moscou, des de petita s'interessà per les ciències de la naturalesa. Es formà gràcies a la biblioteca del seu pare i, després, amb l'ajuda de professors de l'acadèmia militar que li van fer classes particulars. Intentà entrar a l'Acadèmia Agrícola de Petrovskaya, però les portes de les altes institucions educatives estaven tancades per a les dones.

La matemàtica Sofia Kovalskaia (1850-1891) la va convèncer perquè anés a estudiar a l'estranger. Van escollir les universitats de Heidelberg i Göttingen. Fou admesa per treballar al laboratori de Robert Bunsen. Va acceptar el repte, per indicació de Mendeléiev, amb qui mantenia correspondència, de refinar els processos de separació dels metalls del grup del platí (ruteni, rodi, palladi, osmi, iridi i platí). Va aprendre els mètodes d'anàlisi dels minerals i es va integrar en la recerca. Era el primer requisit per poder posar-los en ordre. L'única referència al seu treball consta en la correspondència amb Mendeléiev, que es troba en els seus arxius. Molts treballs seus foren publicats amb el nom de Butlerov (amb agraïments), tot i que la síntesi del 2,4,4-trimetil-2-pentè va aparèixer amb el seu nom el 1879 (Cervellati, 2018).

### Les millors experimentadores

Obtenir valors dels pesos atòmics era decisiu per resoldre les sèries de descomposició radioactiva, i per discriminar nous elements i versions desconegudes dels existents, és a dir, els isòtops. Això resol·lia el problema de molts nous elements que semblaven sorgir de nou, encara que només s'haguessin deixat un parell de forats en la taula periòdica. Malgrat que el britànic Frederick Soddy (1877-1976) va introduir el concepte *isòtop* el 1913, fou la metgessa Margaret Todd (1859-1918) qui va suggerir el terme (que significava 'mateix lloc' en grec).

Stefanie Horovitz (1877-1942), polonesa, va estudiar a la Universitat de Viena. Va subministrar proves experimentals dels isòtops. Treballava a l'Institut del Radi a Viena, i va mostrar que fins i tot elements habituals, com el plom, poden tenir pesos atòmics diferents en funció de si provenen de la descomposició radioactiva de l'urani o del tori. Horovitz va aïllar plom de mostres de pechblenda riques en urani de la mina de St. Joachimstal. Les seves anàlisis gravimètriques, de mil·lèsimes de gram, van provar que el plom creat a partir de la sèrie radioactiva de l'urani té un pes atòmic més baix que el plom habitual. Aquesta fou la primera prova experimental àmpliament acceptada sobre el fet que els elements poden tenir pesos atòmics diferents segons l'origen. Aquest treball experimental rebatia l'existència àmpliament acceptada d'un element i establia el tori com a segon element identificat amb isòtops (Rayner-Canham, 2000).

Ellen Gleditsch (1879-1968) fou una química noruega que tingué la radioactivitat i la radioquímica com el seu camp d'investigació. En aquell moment no hi havia possibilitat per a les dones de fer exàmens d'ingrés a la universitat. Per tant, va treballar com a auxiliar de farmàcia i va tenir l'oportunitat d'obtenir un títol no acadèmic en química i farmacologia el 1902. El 1905, va superar l'examen d'ingrés a la universitat de París. Va començar la seva carrera com a assistent de Marie Curie, amb qui va col·laborar des del 1907 fins al 1912, i va ajudar a demostrar l'existència dels isòtops.

Al laboratori de Curie, Gleditsch va desenvolupar una tècnica anomenada *crystallitzacions fraccionals* per purificar el radi. Després dels cinc anys de treball amb Curie, va mantenir el vincle amb el laboratori i hi tornava sovint per supervisar els experiments. El 1913, va rebre una beca per anar als EUA per continuar les seves investigacions al laboratori millor equipat de radioquímica, a la Universitat de Yale. Va treballar al laboratori de Bertram Boltwood, on va completar les seves investigacions sobre la vida mitjana del radi, la qual va calcular en 1686 anys. Aquest valor va romandre in-

tacte durant trenta-cinc anys fins que el van corregir altres investigadors, amb una capacitat de mesura més precisa, i el van fixar en 1620 anys (Pigeard-Micault, 2013: 105).

Malgrat que Boltwood s'oposava a les dones investigadores, la feina de Gleditsch sobre la vida mitjana del radi el va impressionar tant que va esdevenir amic seu i va escriure amb ella dos articles. Al llarg de la dècada de 1930, va continuar produint articles en anglès, francès, alemany i noruec (Gleditsch, 1909a, 1909b, 1924, 1925). En la dècada de 1930 va dirigir un laboratori de radioquímica a Noruega, que va ser utilitzat com un laboratori clandestí pels científics que fugien del règim nazi. Durant una incursió de les tropes alemanyes en el seu laboratori el 1943, les dones científiques van ser capaces de rescatar els minerals radioactius, però tots els homes van ser detinguts. El 1949, va participar activament en el comitè de treball per al control de la bomba atòmica i el 1952 va ser nomenada membre de la comissió de treball per al control de l'ús de la bomba atòmica.

Ada Florence Remfry Hitchins (1891-1972) va ser la principal assistent de recerca del químic britànic Frederick Soddy (1877-1956), amb qui va treballar durant quinze anys. Soddy va guanyar el premi Nobel l'any 1921 pels seus treballs sobre la radioactivitat i la naturalesa dels isòtops. Hitchins obtenia mostres aïllades de minerals d'urani, i prenia mesures precises del pes atòmic que proporcionaven la primera prova experimental per a l'existència dels diferents isòtops. Les expectatives de Soddy per establir un pròsper centre de recerca a Aberdeen van ser interrompudes per la Primera Guerra Mundial. El 1921, Frederick Soddy, aleshores a la Universitat d'Oxford, va obtenir finançament per tornar a contractar Hitchins com a assistent tècnic. Feia poc que havia rebut el Premi Nobel pel seu treball sobre radioactivitat i isòtops. El 1922, Hitchins va tornar a ser la seva assistent d'investigació privada. La seva acurada preparació de materials radioactius, i el seu meticulós treball experimental amb urani i isòtops de plom, va significar una contribució crucial per a la investigació a partir de la qual Soddy va rebre el Premi Nobel.

La doctora Elizabeth Rona (1890-1981) fou una química nuclear hongaresa nacionalitzada estatunidenca, coneguda pel seu treball amb isòtops radioactius. Després de desenvolupar un mètode millorat de preparació de mostres de poloni, va ser reconeguda internacionalment com la principal experta en la separació d'isòtops i la preparació del poloni. Entre 1914 i 1918, durant el seu estudi postdoctoral, va desenvolupar la teoria sobre el fet que la velocitat de difusió constant del radó en aigua depèn de la massa dels núclids. Atès que només havien estat identificats uns pocs «elements atòmics», per diferenciar-los d'altres elements amb estructures moleculars o gegants, la confirmació de l'existència d'urani-Y va ser una important contribució a la química nuclear.

Harriet Brooks (1876-1933) va néixer el 1876 a Ontàrio; la seva mare la va animar, a ella i les seves germanes, a estudiar. Va estudiar física, i va entrar en un laboratori per començar a investigar sota la direcció d'Ernest Rutherford (1871-1937). Brooks es va centrar en el cas del tori, un metall radioactiu, i va descobrir que es desintegrava en un nou element, que finalment es va anomenar *radó*, i el va caracteritzar. Uns anys més tard, va realitzar experiments que van demostrar que el radó es transformava d'una manera similar (Brooks, 1904). La seva recerca fou pionera: va observar que la descomposició d'un dipòsit actiu de radi i actini depenia de manera evident del temps d'exposició a les seves radiacions respectives, i va establir la corba de descomposició per exposicions molt curtes. Va analitzar l'índex de difusió de les emanacions del radi en l'aire i altres gasos (Pigeard-Micault, 2013: 49).

El 1902, Rutherford i Soddy van enunciar la seva teoria de la desintegració radioactiva: els àtoms es desintegren espontàniament en nous àtoms mentre desprenen radiacions. Rutherford va guanyar



el Premi Nobel de Química el 1908 per les seves investigacions, però la contribució de Brooks sobre el radó va ser el primer esglaó i fou crucial. Ella rarament és reconeguda, tot i que els primers articles portaven l'autoria de Rutherford i Brooks (1901, 1902a, 1902b); el següent, publicat a *Nature*, portava només el nom de Rutherford (1904) amb una línia en els crèdits que deia que Brooks era la seva assistent (Tiggelen i Lykknes, 2019).

Els coneixements sobre el nucli atòmic van continuar emergint. Lise Meitner era austríaca i va anar a Alemanya després d'obtenir el doctorat. El 1907, va ser admesa com a col·laboradora no retribuïda d'Otto Hahn en el Departament de Química de la Universitat de Berlín. Havia de treballar en el soterrani, ja que les dones se suposava que no havien d'estar a la vista. El 1917, Hahn i Meitner van identificar el protoactini mentre buscaven la «substància mare» de l'actini en la sèrie de descomposició radioactiva. Era una part de l'ampla cursa per trobar l'element i ràpidament van sorgir les disputes. El descobriment de la parella va ser reconegut com el primer, perquè Meitner i Hahn van recollir més substància i la van caracteritzar millor que els seus competidors. En l'enfrontament de la Segona Guerra Mundial, com que Meitner era jueva, va fugir a Suècia. Malgrat que van ser els seus càlculs els que van convèncer Hahn que el nucli del protoactini s'havia separat, no va incloure el nom de Meitner en la publicació dels resultats del 1939 ni en va fer cap referència quan va acceptar el Premi Nobel de Química el 1945.

Ida Noddack (1896-1978) va treballar com a convidada, sense un estatus professional, en el laboratori del seu marit Walter Noddack a la Physikalisch-Technische Reichsanstalt tota la vida. No va ser considerada seriosament quan el 1934 va suggerir que el nucli es podia dividir, un procés que avui anomenem *fissió*. El descobriment del neutró el 1932 i la radioactivitat induïda el 1934 van obrir una nova línia de recerca en l'obtenció d'elements bombardejant àtoms amb partícules. El 1934, l'equip d'Enrico Fermi (1901-1954), a la Universitat de Roma, va produir els elements 93 i 94 disparant neutrons al nucli de l'urani. Ida Noddack va assenyalar, en un article a *Angewandte Chemie*, que Fermi no havia demostrat que no es poguessin produir altres elements, inclosos els més lleugers. Ella raonava: «Podria ser que el nucli es desintegrés en diferents fragments grossos». Els físics la van ignorar (Tiggelen i Lykknes, 2019: 210-222).

Marguerite Perey (1909-1975) va descobrir ella sola l'element 87, el franci, el 1939. Perey va entrar a l'Institut de Marie Curie amb dinou anys com a tècnica de laboratori, sota la direcció d'Irène Joliot-Curie (1897-1956) i André Debierne (1914-1949). Tots dos, de forma independent, li van demanar trobar valors precisos per a la vida mitjana de l'isòtop 227 de l'actini, un procés tècnic molt sensible durant el qual va identificar el nou element. Com que ningú podia afirmar per qui estava treballant en aquell moment, ningú era capaç de reclamar de qui era l'autoria del descobriment. Perey publicà els seus resultats de recerca durant els anys 1939 i 1947 (Perey, 1939, 1947). Va ser cap del Departament de Química Nuclear de la Universitat d'Estrasburg i el 1962 fou la primera dona escollida membre corresponent de l'Acadèmia Francesa de Ciències.

### Les experimentadores contemporànies

El significat d'element químic va canviar des del concepte de Mendelèiev d'una substància estable i intransmutable fins als isòtops que existeixen només mil·lisegons. Amb els acceleradors de partícules, la química estatunidenca Darleane Hoffman (1926- ) va fer un salt monumental a l'inici de la dècada de 1970. Mostrà que l'isòtop fermi-257 pot desintegrar-se espontàniament, no només després de bombardejar-lo amb neutrons. Ella va ser la primera dona que va dirigir la divisió científica

del Laboratori Nacional Los Alamos a Nou Mèxic. Hoffman també va descobrir el plutoni-244 a la natura. Darleane Hoffman va formar generacions de científiques, entre elles Dawn Shaughnessy (1980-), radioquímica estatunidenca i investigadora principal del grup d'elements pesants del Laboratori Nacional Lawrence Livermore. Dawn Shaughnessy va estar involucrada en el descobriment de cinc elements superpesants amb nombres atòmics del 114 al 118.

Després que el químic francès Henri Moissan aïllés el fluor el 1886, un grup de dones joves, especialment Carmen Brugger Romaní (1899-?) i Trinidad Salinas Ferrer (?-1965), que treballaven amb José Casares Gil a la Universitat de Madrid en les dècades de 1920 i 1930 estudiaren els efectes del fluor en la salut i la presència en les aigües minerals. Quan van haver de deixar la recerca després de la Guerra Civil del 1936, la seva feina va quedar amagada entre la bibliografia de Casares. Suay Matallana (2019: 158-169, la traducció és meua) citant a Carmen Magallón diu: «El laboratori el portaven diverses dones joves amb dos objectius: aprendre sobre la cultura material de la química amb intencions didàctiques i millorar el seu coneixement pràctic per desenvolupar la seva pròpia recerca. Totes dues estaven llicenciades en farmàcia, i tenien el doctorat en farmàcia per la Universitat de Madrid. La seva recerca implicava anàlisis quantitatives del fluor i el desenvolupament de noves tècniques per trobar fluor en diferents substàncies orgàniques i animals. Brugger i Salinas van tenir problemes per consolidar les seves carreres científiques després de la Guerra (1936-1939). El seus treballs van ser ignorats i altres alumnes masculins de Casares es van apropiat de les seves línies de recerca durant la dictadura.»

### **Reflexions finals**

L'article recull algunes de les aportacions de diferents dones científiques als treballs que es van desenvolupar en diferents moments històrics entorn de la taula periòdica. La majoria d'elles van ser molt bones experimentadores i van treballar amb els equips que es van formar en les universitats i els centres d'investigació. Van col·laborar en la identificació de nous elements, en el càlcul de pesos atòmics i propietats químiques, en la millora de les tècniques i els processos de separació de les substàncies, en l'obtenció de substàncies pures i en les proves experimentals necessàries per a la identificació dels elements. Algunes d'elles van treballar amb companys que van rebre el Premi Nobel pel treball desenvolupat conjuntament. Totes van col·laborar a ampliar el nostre coneixement dels elements químics i la taula periòdica. És de justícia que les seves aportacions arribin a les aules si volem oferir models d'imitació i referència femenins per impulsar les vocacions científiques.

## Referències bibliogràfiques

- BROOKS, H. T. (1904). «The decay of the excited radioactivity from thorium, radium, actinium». *Philosophical Magazine*, 8, p. 373-384.
- CERVELLATI, R. (2018). «Le donne scienziate in Russia nella seconda metà del XIX secolo». A: *La Chimica e la Società* [en línia] (6 juliol). <<https://ilblogdellasci.wordpress.com/2018/07/06/le-donne-scientiate-in-russia-nella-seconda-meta-del-xix-secolo-migranti-della-conoscenza-2/>> [Consulta: 19 novembre 2019].
- GLEDITSCH, E. (1909a). «Sur le radium et l'uranium contenus dans les minéraux radioactifs». *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 148, p. 1451-1453.
- (1909b). «Sur le rapport entre le radium et l'uranium dans les minéraux radioactifs». *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 149, p. 267-268.
- (1924). «Sur le poids atomique du chlore». *Journal de Physique et Le Radium*, 21, p. 456.
- (1925). *Contribution to the study of isotopes*. Oslo: J. Dybwad, p. 46.
- PEREY, M. (1939). «Sur un élément 87, dérivé de l'actinium». *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 208, p. 97-99.
- (1947). «Pouvoir émanateur des composés de lanthane actinifère». *Journal Phys. Radium*, 8/6, p. 179-181.
- PIGEARD-MICAULT, N. (2013). *Les femmes du laboratoire de Marie Curie*. Paris: Glyphe.
- RAYNER-CANHAM, M.; RAYNER-CANHAM, G. (2000). «Stefanie Horowitz, Ellen Gleditsch, Ada Hitchens and the discovery of isotopes». *Bulletin for the History of Chemistry*, 25, 2, p. 103-108.
- RUTHERFORD, E. (1904). «A volatile product from radium». *Nature*, 64, p. 157-158.
- RUTHERFORD, E.; BROOKS, H. T. (1901). «The new gas from radium». *Transactions of the Royal Society of Canada*, 2, III, 7, p. 21-25.
- (1902a). «The new gas from radium». *Chemical News*, 196, p. 26-28.
- (1902b). «Comparison of the radiations from radioactive substances». *Philosophical Magazine*, 6, 4, p. 1-23.
- SUAY-MATALLANA, I. (2019). «Fluorine and the research of Vicenta Arnal, María del Carmen Brugger, and Trinidad Salinas». A: LYKKNES, A.; TIGGELEN, B. van (ed.). *Women in their element*. New Jersey: World Scientific, p. 158-169.
- TIGGELEN, B. van; LYKKNES, A. (2019). «The women behind the periodic table». *Nature*, 565, p. 559-561.

## ENSENYAMENT D'HISTÒRIES SOBRE COLOR I ELEMENTS EN L'ANY INTERNACIONAL DE LA TAULA PERIÒDICA

**ROSA M. MELIÀ;<sup>1</sup> M. TURA PUIGVERT<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> INS INFANTA ISABEL D'ARAGÓ I ASSOCIACIÓ DE PROFESSORES I PROFESSORS DE FÍSICA I QUÍMICA DE CATALUNYA.

<sup>2</sup> ASSOCIACIÓ DE PROFESSORES I PROFESSORS DE FÍSICA I QUÍMICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *color, pigments, colorants, indústria, segle XIX*

### Teaching stories about colour and elements in the International Year of the Periodic Table

Summary: *The use and scientific knowledge of coloured substances underwent significant development at the time when the periodic table was structured. This paper highlights the discovery of new elements and the synthesis of new pigments and dyes as a source of major changes in science, art, fashion, industry, and economics. These are stories for learning chemistry in its historical context.*

Key words: *colour, pigments, dyes, industry, 19th century*

### El context

A mitjans del segle XIX es produeixen grans canvis en l'estudi de les substàncies químiques i, des de diferents àmbits de treball, s'estructuren les bases de la química teòrica actual. El coneixement cada cop més extens sobre les propietats de les substàncies i la necessitat de posar-hi ordre amb una classificació coherent s'accentuà al llarg de moltes dècades.

El creixement de la química orgànica i la teoria dels tipus, els criteris de puresa, els conceptes *element*, *àtom* o *molècula* (Caamaño *et al.*, 2019) van ser molt debatuts i la seva acceptació, fonamental per a la construcció de l'ordena-

ment sistemàtic dels elements i el naixement de la química com a ciència al llarg del segle XIX. Es construïa a poc a poc l'àtom químic (Agudelo i Izquierdo, 2019) i la formulació orgànica.

**Relacions entre elements de la taula periòdica i el color**

Com a resultat d'una primera cerca de narracions idònies per contribuir a ensenyar química en la commemoració del sesquicentenari de la taula periòdica, en les imatges mostrem relacions que actualment es poden establir entre els elements químics i el color (Puigvert, 2020): les substàncies simples acolorides (fig. 1), els noms d'elements que es relacionen amb el color (fig. 2), el descobriment de nous elements que donaran lloc a nous pigments (fig. 3), els elements que intervenen en l'emissió de llum (fig. 4) i els elements que intervenen en el color dels leds (fig. 5).

El desenvolupament de l'espectroscòpia i la recerca experimental en els laboratoris han estat fonamentals per a la interpretació de la naturalesa de les substàncies. En aquesta publicació ens centrem en la importància que ha tingut per a la química la síntesi de substàncies acolorides.

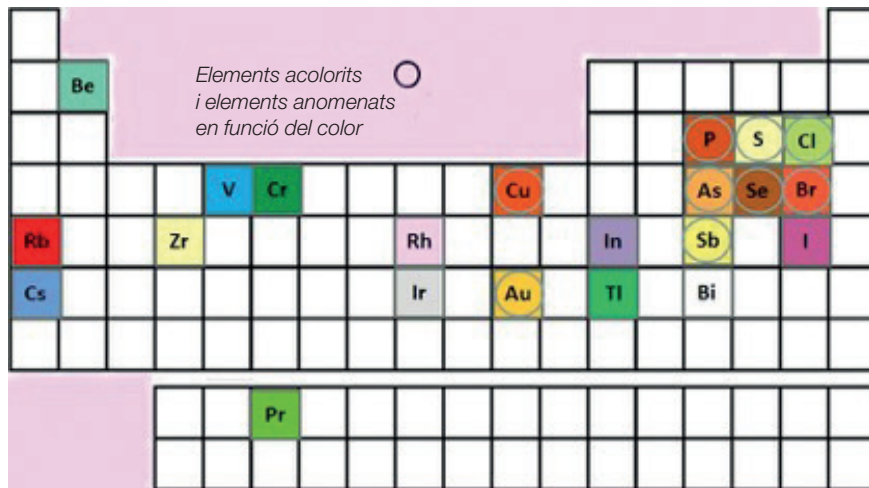


FIGURA 1. Substàncies simples acolorides i elements anomenats en funció del color.  
FONT: Elaboració pròpia.

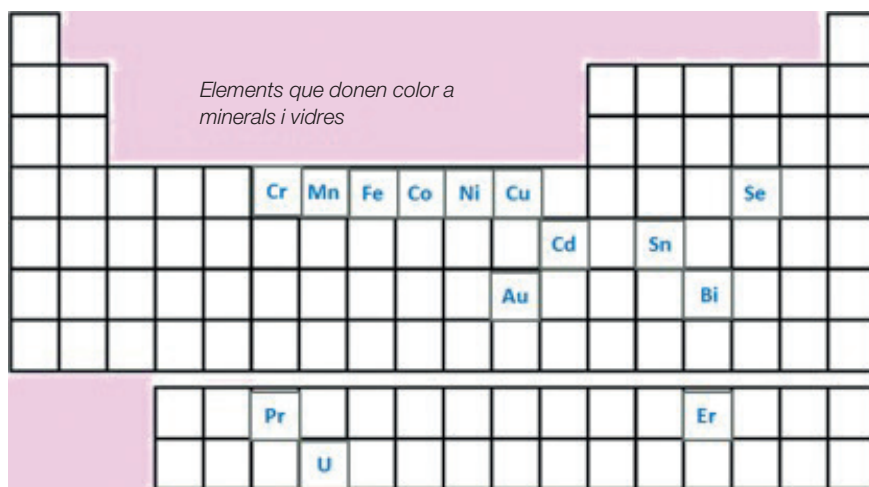


FIGURA 2. Elements que es relacionen amb el color de vidres i minerals.  
FONT: Elaboració pròpia.



### Descoberta de nous elements i síntesi de nous pigments

Des de mitjans del segle XVIII fins a mitjans del segle XIX van ser descoberts uns metalls de transició que van ser bàsics per produir nous pigments inorgànics (fig. 3). Abans ja era un fet freqüent que pintors i tintorers treballassin en equip amb artesans per aconseguir els millors colors, però, des del segle XVIII, sorgeixen amb força els químics que aïllen substàncies pures, descobreixen elements i n'estudien la seva reactivitat. Els nous compostos acolorits, produïts a escala industrial, van donar lloc als pigments que van provocar noves tendències en pintura: els impressionistes, els fauvistes i els iniciadors de la pintura abstracta (Ball, 2003).

Recordem l'any de descoberta dels metalls a què fem referència dins d'aquest període: cobalt, 1735; zinc, 1751; níquel, 1751; manganès, 1774; crom, 1780; molibdè, 1781; titani, 1792; vanadi, 1801; cadmi, 1817. Esmentem els pigments inorgànics sintetitzats en aquesta època: blau de Prússia o de Diesbach, hexacianoferrat(II) de ferro(III), 1704; verd de Scheele, hidrogenarsenit de coure(II), 1775; colors de crom, de Vauquelin, 1780; blanc de titani, diòxid de titani, 1792; blau de cobalt o de Thenard, aluminat de cobalt(II), 1807; verd maragda, acetoarsenit de coure(II), 1814; colors de cadmi o de Stromeyer, 1817; blau ultramar o de Guimet, 1826, entre d'altres.

El blau dels vitralls gòtics i la porcellana xinesa eren secrets molt ben guardats. A l'edat mitjana no s'havia descobert el cobalt, però els vitralls blaus que contenien sals de cobalt són els que han mantingut tota la intensitat del color al llarg dels segles. El vidriat de la porcellana xinesa es va estendre a tot el món àrab, al Japó i posteriorment a Europa.

Louis Jacques Thenard va rebre l'encàrrec de Jean-Antoine Chaptal, científic que va ser ministre d'Interior de França del 1801 al 1804, per trobar un substitut barat al lapislàtzuli. Thenard va estudiar el procés que se seguia amb el blau de la porcellana de Sèvres i va assajar els nous pigments que obtenia fent reaccionar amb proporcions diverses el fosfat i l'arseniat de cobalt amb alumina. El 1804, va publicar el procediment d'obtenció del pigment blau de cobalt, que es va poder emprar en pintura perquè era suficientment estable.

El 1765, es descobreix a Ekaterinburg la crocoïta, anomenada *plom vermell*. Louis Nicolas Vauquelin en va rebre una mostra per ser analitzada i hi va detectar un nou metall. El va anomenar *crom*, per la seva tendència a produir compostos acolorits. Va proposar el cromat de plom com a pigment. A partir d'aleshores, els principals pigments de crom produïts industrialment han estat el cromat de plom, groc; l'oxicromat de plom, taronja, i l'òxid de crom(III) dihidrat, verd viridià. Trobem colors de crom en l'obra de pintors importants, tot i la toxicitat del crom(VI) i la possible degradació posterior del color per agents atmosfèrics.

El blanc de titani és un pigment molt resistent que absorbeix les radiacions infraroja i ultravioleta, amb fluorescència. Ha pogut substituir els pigments blancs de plom, més inestables i tòxics. És el pigment més usat per pintar de blanc i per aclarir altres colors.

Amb el cadmi, descobert per Friedrich Stromeyer, es poden obtenir pigments de colors molt vistosos. El sulfur de cadmi, groc, opac i permanent, malgrat la seva toxicitat, va ser molt acceptat pels pintors del segle XIX. A més, es poden obtenir els colors verd, marró, taronja, vermell intens o vermell fosc, segons la quantitat d'impureses de sofre o seleni que contingui el sulfur de cadmi.

El blau ultramar s'anomenava així perquè la primera matèria provenia d'Afganistan i, via l'Orient Mitjà, arribava al port de Venècia. El pigment s'obtenia polvoritzant la lazurita, un cop separada del lapislàtzuli. El mineral era valorat com a gemma i, per tant, de preu elevat.

L'any 1826, el francès Jean Baptiste Guimet i, el 1828, l'alemany Christian Gmelin van arribar a l'obtenció industrial del blau ultramar a partir de caolí, sofre, sosa i carbó. Es va substituir l'ús de lapislàtzuli com a pigment. Modificant les proporcions en el procés de fabricació, s'obtenien variacions en el color blau a més clar, més lila o més verdós. En la composició de la latzurita  $[3\text{Na}_2\text{O}\cdot 3\text{Al}_2\text{O}_3\cdot 6\text{SiO}_2\cdot 2\text{Na}_2\text{S}]$  sorprenia que la causa del color blau no fos la presència d'algun dels metalls de transició. L'explicació es troba en el sofre. En medi àcid el color desapareix i es desprèn olor d'àcid sulfhídric. El color es deu a la presència dels ions trisulfur distribuïts regularment en la seva xarxa cristal·lina (Puigvert, 2020).

### Producció industrial de colorants orgànics

Fins ben entrada la segona meitat del segle XIX, la recerca sobre colorants va ser totalment empírica. Encara no es coneixien les fórmules orgàniques. Es partia del benzè, el toluè, l'anilina, la toluídina, la quinolina i productes relacionats. En els laboratoris es provaven les propietats i la reactivitat dels productes obtinguts. Amb els colorants es comprovava quines fibres es tenyien i quin procés de fixació estabilitzava millor el color de les fibres tenyides.

Un cas emblemàtic de les dificultats d'identificació de substàncies és el de l'anilina. El 1843, August Wilhelm von Hofmann identifica com la mateixa substància —anilina— els productes *crystalin*, *cianol*, *anilina* i *benzidam*, que s'havien obtingut separatament i per processos diferents en les dècades anteriors.

Va sorgir una generació de químics que s'arriscaven a fabricar productes químics a escala industrial. Molts colorants sintètics entrarien en competència amb les substàncies obtingudes d'extractes de vegetals i animals. Seleccionem quatre casos representatius: la fucsina, la mauveïna, l'alitzarina i l'anyil.

L'any 1856, el químic polonès Jacob Natanson obtenia la fucsina, un colorant de color fúcia, per l'acció del clorur d'etilè sobre l'anilina. Un xic més tard, François-Emmanuel Verguin va obtenir la mateixa substància per oxidació de l'anilina amb clorur d'estany(IV) i va escollir el nom de *magenta*. S'obriren fàbriques a Lió, Manchester i Ludwigshafen i es van comercialitzar els colors blau imperial, castany Bismark i blau de quinolina, però encara no es comprenia la seva química. La síntesi de la fucsina no es va aconseguir fins al 1878, amb Emil i Otto Fisher.

El descobriment de la mauveïna és molt citat en història de la química. Com moltes altres serendipitats, no és fruit exclusiu de la casualitat, ja que no s'hauria derivat el mateix si William Henry Perkin hagués estat una altra persona. A mitjans del segle XIX, la indústria farmacèutica emprava grans quantitats d'opi, morfina, cocaïna i quinina per a tota mena de tractaments. Importar i processar aquestes drogues resultava costós, per la qual cosa farmacèutics i químics es van preguntar si no es podria aconseguir una síntesi que les abaratís. Hofmann imaginava que es podria obtenir quinina per addició del grup amina a la naftalina. Des de 1853, Perkin estudiava amb Hofmann al Royal College of Chemistry de Londres i investigava la síntesi de la quinina. Amb la idea que la molècula de la quinina es diferenciava del dímer de la d'alliltoluídina en dues molècules d'aigua, va combinar alliltoluídina amb dicromat de potassi i en va resultar una substància marró ben diferent de la quinina. En la reacció amb sulfat d'anilina va obtenir un precipitat fosc que va tenyir de lila el drap de laboratori i va comprovar que també servia per tenyir seda. Havia sintetitzat la porpra de tir o mauveïna. Hofmann desaconsellà al jove Perkin l'obtenció industrial del colorant. El veia molt jove per afrontar els problemes econòmics, d'enginyeria i de seguretat que implicava el muntatge a gran esca-



la. El 1856, Perkin inicià la fabricació de mauveïna després d'obtenir la patent legal per comercialitzar-la i l'ajut econòmic i humà de la seva família. Fou un descobriment en un moment oportú, ja que la classe mitjana europea gastava molt en vestits i tapisseria. El lila es va posar de moda a les classes altes i, posteriorment, entre les sufragistes angleses i les feministes de tot el món. Seguir l'evolució personal de Perkin, fins que el 1874 es retirà del negoci industrial i es tornà a dedicar a la recerca, és una narració interessant dins el context de la producció de colorants a Europa.

El 1829, Pierre Jean Robiquet va aconseguir aïllar la substància que actuava com a colorant en la rogeta, també anomenada *alitzarina* o *gransa*, però no es va aconseguir la síntesi de l'alitzarina fins l'any 1869, quan la química ja estava prou madura per dissenyar síntesi estructural de molècules noves. El 1866, Friedrich August Kekulé havia proposat l'estructura del benzè i s'iniciava una nova etapa per als colorants. Coneguda l'estructura del colorant natural, es dissenyava la síntesi molecular en el laboratori i, quan ja s'havia aconseguit l'obtenció, calia dissenyar la producció rendible a escala industrial. Tres grups independents van aconseguir per diferents camins la síntesi d'alitzarina. Aleshores s'iniciava la guerra de patents per dominar els mercats. La producció d'alitzarina sintètica va desplaçar les plantacions de rogeta, cosa que va representar un desastre per als agricultors francesos.

Descriure l'aventura personal d'Adolf von Baeyer per sintetitzar l'anyil sensibilitza sobre les dificultats de la recerca, la complexitat de la indústria química i les conseqüències de les grans produccions industrials. Adolf von Baeyer va descobrir la síntesi de la indigotina i va vendre a BASF (Badische Anilin und Soda Fabrik) els drets d'explotació comercial. Des de la identificació de la fórmula fins a la seva síntesi, l'aventura va durar trenta-dos anys i li va valdre el Premi Nobel de Química del 1905. En el discurs que va ser llegit davant la Reial Acadèmia Sueca de Ciències es ressaltà la sinergia entre ciència i tecnologia, la importància de la inversió en recerca científica i la influència de la indústria química en les balances econòmiques internacionals. L'anyil o indi natural, obtingut a partir de les plantes tintoreres, com el glast de França i les *indigoferes* d'Amèrica Central i l'Índia, va ser ràpidament substituït pel sintètic.

### **De les empreses familiars de colorants als grans trusts del segle xx**

A mitjans del segle XIX van sorgir moltes iniciatives privades per constituir societats dedicades a la fabricació industrial de colorants artificials. Al Regne Unit, destaquen Leech, Neal and Co, fundada per produir pintures i òxids de ferro; Levinstein Ltd., dedicada a la producció de magenta i colorants azoics, i Read Holliday and Sons Ltd., dedicada a la destil·lació de quitrà de carbó, colorants d'anilina i colorants azoics. A Alemanya, Bayer AG, fundada a Wuppertal per Friedrich Bayer i Johann Friedrich Weskott com a fàbrica de tints; BASF, fundada a Ludwigshafen, per Friedrich Engelhorn, fàbrica de carbonat de sodi i colorants d'anilina; Hoechst, fundada per Wilhelm Meister, Eugen Lucius, August Müller i Gustav von Brüning a Höchst per produir colorants sintètics, i AGFA (Aktien-gesellschaft für Anilinfabrikation), iniciativa de Paul Mendelssohn Bartholdy i Carl Alexander von Martius, per fabricar anilina. Als Estats Units, l'imperi Dupont s'inicia el 1802, quan Eleuthère Irénée du Pont de Nemours, col·laborador de Lavoisier i fill d'hugonot escapat del terror revolucionari, construeix la fàbrica de pólvora a Willmington. Més tard fabricarà colorants i moltes més substàncies químiques.

Al cap de mig segle de producció, es van donar canvis considerables en el desenvolupament del model de negoci que s'havia iniciat en cada país (Homburg *et al.*, 1998). Des de 1856, les firmes britàniques van liderar el mercat durant vuit anys, però les alemanyes ho van fer durant dècades,

mentre que les coetànies americanes hi van tenir un paper secundari. Estudis d'aquest període, considerat com la segona revolució industrial, destaquen un complex procés de coevolució entrellaçant firmes, tecnologia i institucions nacionals (Murmman, 2003). Comparant els processos de transformació dels països es veuen fonamentals les diferències en les institucions educatives i en la política de patents així com el tipus de vinculació de les firmes prestigioses als centres de recerca en química orgànica.

Ja en el segle xx es van formar els grans càrtels industrials: el 1925, Bayer, BASF, Hoechst i AGFA constituïren IG Farben. El 1926, es creà ICI (Imperial Chemical Industries) a partir de la ja anteriorment fusionada British Dyestuffs Corporation Ltd., Brunner Mond, Nobel Explosives i United Alkali Company. El 1996, les suïsses ja prèviament fusionades Ciba-Geigy i Kern-Sandoz formaren Novartis. Totes elles havien començat produint colorants sintètics (Homburg *et al.*, 1998).

### **Conclusió**

Amb la perspectiva de cent cinquanta anys, un conjunt de relats sobre química i color en el segle XIX ens ajuda a construir aspectes fonamentals en educació química. Així com l'autoria de la creació de la taula periòdica no podem atribuir-la exclusivament a Mendeléiev (Bertomeu, 2019), en una aproximació científica a les substàncies acolorides, és fonamental mostrar la importància de la col·laboració professional entre científics, enginyers i artesans, la coevolució d'indústria, instituts de recerca i universitats i fer èmfasi que en el món laboral han d'estar presents els valors d'una responsabilitat corporativa global. Val la pena ensenyar històries que ajudin a comprendre la naturalesa de la ciència (Grapí, 2015) i que potenciïn una química responsable amb la salut de les persones i respectuosa amb el medi.

## Referències bibliogràfiques

- AGUDELO, C.; IZQUIERDO M. (2019). «La taula periòdica en l'ensenyament de la química, una invitació a pensar sobre els materials». *Educació Química EduQ*, 25, p. 41-46.
- BALL, P. (2003). *La invención del color*. Madrid: Turner - Fondo de Cultura Económica.
- BERTOMEU SÁNCHEZ, J. R. (2019). «El sistema periòdic i la pedagogia química del segle XIX: la creativitat col·lectiva de les aules de ciències». *Educació Química EduQ*, 25, p. 21-31.
- CAAMAÑO, A. GUITART J.; GRAPÍ P. (2019). «L'educació del concepte *element químic* i de la taula periòdica a l'educació secundària». *Educació Química EduQ*, 25, p. 32-40.
- GRAPÍ, P. (2015). «El repte de les narracions històriques en l'ensenyament de les ciències. El cas de la pila de Volta». A: GRAPÍ, P.; MASSA, M. R. (ed.). *Actes de la XIII Jornada de la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, p. 85-92.
- HOMBURG, E.; TRAVIS, S.; SCHRÖTER H. G. (1998). *The chemical industry in Europe, 1850-1914: Industrial growth, pollution, and professionalization*. Dordrecht: Springer Netherlands.
- MURMANN, J. P. (2003). *Knowledge and competitive advantage: The coevolution of firms, technology, and national institutions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- PUIGVERT, M. T. (2020). «Els colors en la taula periòdica». *Atzavara*, 30, p. 15-26.

**ACTES DE LA  
XVII JORNADA  
SOBRE LA HISTÒRIA  
DE LA CIÈNCIA  
I L'ENSENYAMENT**